



بخش آموزش رسانه تفریحی سنتر

کلیک کنید  www.tafrihicenter.ir/edu

 نمونه سوال  گام به گام

 امتحان نهایی  جزوه

 دانلود آزمون های آزمایشی

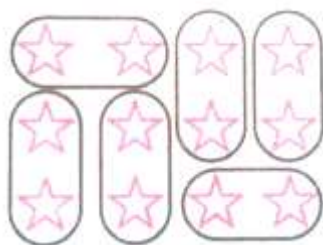


ریاضی ششم دبستان

فصل ۱ - عدد و الگوهای عددی

درس اول - الگوهای عددی

در شکل مقابل ۱۲ ستاره هست. آن ها را به دسته های دوتایی تقسیم می کنیم. همان طور که مشاهده می کنید، تمام ستاره ها در دسته های دوتایی قرار گرفته اند و هیچ ستاره ای باقی نمانده است.



عدد ۱۲، عدد زوج است، زیرا اگر ۱۲ تا قلم یا ۱۲ تا دفتر یا ۱۲ تا ستاره داشته باشیم، می توانیم آن ها را به دسته های دوتایی تقسیم کنیم، بدون اینکه قلم یا دفتر یا ستاره ای خارج از دسته های دوتایی داشته باشیم. می دانیم که هر انسان دو دست است. جدول زیر رابطه ی بین تعداد انسان ها و تعداد دست های آن ها را نشان می دهد.

تعداد انسان ها	۱	۲	۳	۷	۱۹
تعداد دست ها	۲	۴	۶	۱۴	۳۸
رابطه ی بین تعداد انسان ها و تعداد دست ها	1×2	2×2	3×2	7×2	19×2

طبق رابطه ای که در جدول بالا وجود دارد، می توانیم بنویسیم:

تعداد انسان ها $\times 2$ = تعداد دست ها

اگر تعداد انسان ها را با دایره و تعداد دست ها را با مربع نشان دهیم، رابطه ی بالا به صورت زیر در می آید.

$$\square = 2 \times \bigcirc$$

مثال: ۱۷ انسان روی هم چند دست دارند؟ (علامت فلش یعنی: نتیجه می گیریم)

پاسخ:

$$\boxed{17} = 2 \times 17 \Rightarrow \boxed{34}$$

مثال: ۵۲ دست برای چند انسان است؟

پاسخ:

$$\boxed{52} = 2 \times \text{انسان} \Rightarrow \text{انسان} = 52 \div 2 = 26$$

به عدد های ... و ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ عددهای طبیعی می گویند.

به عددهای ... و ۱۲ و ۱۰ و ۸ و ۶ و ۴ و ۲ عددهای زوج یا مضرب های عدد ۲ می گویند.

مضرب ۲ یعنی عددی که بر ۲ بخش پذیر است.

از ضرب عددهای طبیعی در عدد ۲، عددهای زوج حاصل می شود.

عددهای طبیعی	۱	۲	۳	۴	۵	۶	...
× ۲	۲	۴	۶	۸	۱۰	۱۲	...
عددهای زوج							

در عددهایی که بیش از یک رقم دارند، اگر رقم سمت راست عدد، ۰، ۲، ۴، ۶، یا ۸ باشد، به آن عددها، عددهای

زوج می گوییم. مانند: ۳۷۵۶ - ۲۱۸ - ۷۳۳۴

با توجه به الگویی که در شکل زیر هست، جدول زیر را کامل کرده ایم.

شماره شکل	۱	۲	۳	۴	...
تعداد دایره ها	۱	۳	۵	۷	...
رابطه ی بین شماره ی شکل و تعداد دایره ها	$(1 \times 2) - 1$	$(2 \times 2) - 1$	$(3 \times 2) - 1$	$(4 \times 2) - 1$	...

مثال: شکل شماره ی ۲۳ دارای چند دایره است؟

پاسخ:

$$۲۳ \times ۲ - ۱ = ۴۵$$

مثال: شماره ی شکلی که دارای ۹۳ دایره است، چند است؟

پاسخ:

$$۹۳ = ۲ \times \text{شکل} - ۱ \rightarrow \text{شکل} = \frac{۹۳ + ۱}{۲} = ۴۷$$

اگر شماره ی شکل را با مربع و تعداد دایره ها را با دایره نمایش دهیم، رابطه ی بین تعداد دایره ها و شماره ی شکل به صورت زیر است.

$$\text{دایره} = ۲ \times \text{شکل} - ۱$$

به عددهای ... و ۱۱ و ۹ و ۷ و ۵ و ۳ و ۱ عددهای فرد می گوئیم.

هر عدد طبیعی که زوج نباشد، فرد است.

به جدول زیر دقت کنید.

عددهای طبیعی		۱	۲	۳	۴	۵	...
×۳ مضرب های ۳	۱	۳	۶	۹	۱۲	۱۵	...
	۳						

همان طور که می بینید عددهای سطر پایین مضرب های ۳ هستند؛ یعنی عددهایی که بر ۳ بخش پذیرند.

از ضرب عددهای طبیعی در ۳، مضرب های ۳ حاصل می شوند.

عددهای ... و ۲۵ و ۲۰ و ۱۵ و ۱۰ و ۵ را مضرب های ۵ می گویند.

مضرب های ۵، بر ۵ بخش پذیر هستند.

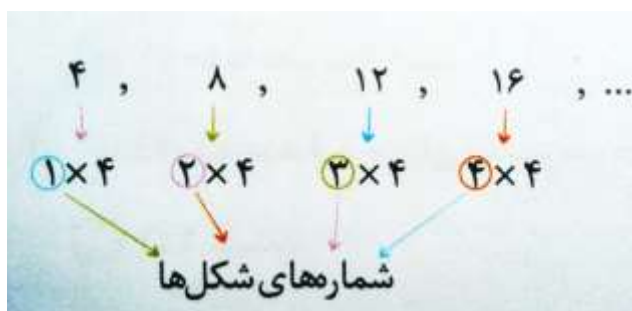
♦ کوچک ترین مضرب هر عدد، خود آن عدد است.

مثال: کوچک ترین مضرب ۷، عدد ۷ و کوچک ترین مضرب ۱۸، عدد ۱۸ است.

به الگوی زیر که با چوب کبریت ساخته شده، دقت کنید.



الگوی عددی مقابل، تعداد چوب کبریت های شکل بالا را نشان می دهد.



این الگوی عددی مضرب های ۴ را نشان می دهد. چون تعداد چوب کبریت های هر شکل ۴ برابر عدد شماره ی آن شکل است، پس بین آن ها تناسب برقرار است.

مثال: در شکل هفتم چند چوب کبریت وجود دارد؟

پاسخ:

$$\begin{array}{l} \text{(شماره ی شکل)} \leftarrow \frac{1}{4} = \frac{7}{28} \times 4 \\ \text{(تعداد چوب کبریت)} \leftarrow \end{array}$$

مثال: در شکل چندم ۶۸ چوب کبریت هست؟

پاسخ: در شکل هفدهم

$$\frac{1}{4} = \frac{17}{68}$$

به ضرب های مقابل دقت کنید.

$$1 \times 12 = 12$$

$$2 \times 6 = 12$$

$$3 \times 4 = 12$$

با توجه به تساوی های بالا، می فهمیم که ۱۲، مضرب عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۶ و ۱۲ است.

مثال: عدد ۱۸ مضرب چه عددهایی می تواند باشد؟

پاسخ: عدد ۱۸ مضرب عددهای ۱، ۲، ۳، ۶، ۹ و ۱۸ است.

$$1 \times 1 \wedge = 1 \wedge$$

$$2 \times 9 = 18$$

$$3 \times 6 = 18$$

مثال: سه عدد بعدی الگوی عددی زیر را بنویسید و سپس عدد چهارم این الگو را بیابید.

۳ و ۸ و ۱۳ و ۱۸ و ...

پاسخ: ... و ۳۳ و ۲۸ و ۲۳ و ۱۸ و ۱۳ و ۸ و ۳

چون با اضافه کردن ۵ واحد به هر یک از عددهای الگو عدد بعدی به دست می آید، بنابراین اعداد الگو با مضرب های ۵ ارتباط دارند.

$\text{عدد اول} = 1 \times 5 - 2 = 3$
 $\text{عدد دوم} = 2 \times 5 - 2 = 8$
 $\text{عدد سوم} = 3 \times 5 - 2 = 13$

الگوهای عددی ۲

در سال های قبل با مفهوم الگویابی آشنا شده اید و آموختید که الگویابی یکی از ابزارهایی است که می توانیم از آن برای حل یک مسئله استفاده کنیم. به مثال زیر دقت کنید:

وسیله ی مقابل «ریکشا» نام دارد. از این وسیله در کشور هند برای جابه جایی مسافران داخل شهر استفاده می شود. همان طور که ملاحظه می کنید، این وسیله دارای سه چرخ است. با تشکیل جدول زیر می توانیم رابطه ی بین تعداد ریکشاها و همچنین تعداد چرخ ها را بیابیم.



تعداد ریکشاها	۱	۲	۳	۴	...	۱۵
تعداد چرخ ها	۳	۶	۹	۱۲	...	۴۵
رابطه ی بین تعداد چرخ ها و تعداد ریکشاها	1×3	2×3	3×3	4×3	...	15×3

با دقت در جدول بالا، نتیجه می گیریم که هیچ گاه تعداد چرخ ها از ۵ یا ۷ یا ۸ چرخ نمی شود و همواره تعداد چرخ ها باید بر ۳ بخش پذیر باشد.

در مثال بالا به عددهای ۳ و ۶ و ۹ و ۱۲ و ... مضرب های عدد ۳ گفته می شود.

مضرب

از ضرب هر عدد طبیعی در عددهای ۱ و ۲ و ۳ ... مضرب های آن عدد ساخته می شود. بنابراین مضرب های هر عددی همواره بر آن عدد بخش پذیر هستند.

$$\text{مضربهای ۷: } 7 \times 1, 7 \times 2, 7 \times 3, 7 \times 4, \dots \rightarrow 7, 14, 21, 28, \dots$$

$$\text{مضربهای ۴: } 4 \times 1, 4 \times 2, 4 \times 3, 4 \times 4, \dots \rightarrow 4, 8, 12, 16, \dots$$

$$\text{مضربهای ۲۰: } 20 \times 1, 20 \times 2, 20 \times 3, 20 \times 4, \dots \rightarrow 20, 40, 60, 80, \dots$$

نکته:

۱- کوچک ترین مضرب هر عددی، برابر خود آن عدد، و بزرگ ترین مضرب آن عدد، نامعلوم است.

۲- عددهای زوج، همان مضرب های ۲ هستند. ... و ۸ و ۶ و ۴ و ۲ : عددهای زوج

اعداد فرد

به الگوی عددی زیر توجه کنید:

$$1, 3, 5, 7, \dots, 19, \dots, 35, \dots, 101, \dots$$

به این اعداد، عددهای فرد می گوئیم. با دقت در این عددها ملاحظه می کنید که اگر به هر یک از این عددها ۲ واحد اضافه کنیم، عدد بعدی آن به دست می آید؛ یعنی فاصله ی هر عدد با عدد قبل و یا بعد از خودش مساوی ۲ واحد است. لذا برای پیدا کردن رابطه ی هر عدد فرد و شماره ی آن عدد، می توانیم از مضرب های ۲ کمک بگیریم:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \times 2 - 1, & 3 &= 2 \times 2 - 1, & 5 &= 3 \times 2 - 1, & 7 &= 4 \times 2 - 1, & \dots, & 19 &= 10 \times 2 - 1, & \dots, & 35 &= 18 \times 2 - 1 \\ \text{اولین عدد فرد} & & \text{دومین عدد فرد} & & \text{سومین عدد فرد} & & \text{چهارمین عدد فرد} & & \text{دهمین عدد فرد} & & \text{هجدهمین عدد فرد} & & \\ \dots, & & & & & & & & & & & & \\ \dots, & & & & & & & & & & & & \\ 101 &= 51 \times 2 - 1 \\ \text{پنجاه و یکمین عدد فرد} & & & & & & & & & & & & \end{aligned}$$

با دقت در رابطه های بالا نتیجه می شود که: $1 - (2 \times \text{شماره ی آن عدد}) = \text{هر عدد فرد}$

بنابراین نهمین عدد فرد برابر است با: $17 = 1 - (2 \times 9) = \text{نهمین عدد فرد}$

مثال ۱: با توجه به الگوی زیر، به سؤالات پاسخ دهید.



الف) شکل پنجم، چه عددی را نشان می دهد؟ این شکل ها، الگوی عددی روبه رو را نشان می دهند:

.... و ۱۹ و ۱۴ و ۹ و ۴

به هر شکل، ۵ توپ اضافه شده تا شکل بعدی آن به دست آمده است. به این ترتیب در شکل پنجم، $24 = 19 + 5$ توپ وجود دارد. در این سؤال با توجه به اینکه فاصله ی بین هر عدد با عدد بعد از خودش، ۵ واحد است، برای پیدا کردن رابطه ی بین هر عدد و شماره ی آن عدد، می توانیم از مضرب های ۵ کمک بگیریم:

$$\underbrace{4 = 1 \times 5 - 1}_{\text{اولین عدد}}, \underbrace{9 = 2 \times 5 - 1}_{\text{دومین عدد}}, \underbrace{14 = 3 \times 5 - 1}_{\text{سومین عدد}}, \underbrace{19 = 4 \times 5 - 1}_{\text{چهارمین عدد}}, \dots, \Delta \times 5 - 1 = \text{عدد شماره ی } \Delta$$

ب) برای ساختن شکل بیستم به چند عدد توپ نیازمندیم؟

با توجه به رابطه ی بالا برای ساختن شکل بیستم:

$$99 = 1 - (20 \times 5) = \text{تعداد توپ ها در شکل بیستم}$$

ج) آیا شکلی دقیقاً با ۳۰ عدد توپ ساخته می شود؟

با توجه به اینکه عددهای ۴، ۹، ۱۴، ۱۹ و ... همواره یک واحد از مضرب های ۵ کم تر هستند و ۳۰ دقیقاً مضرب ۵ است. دقیقاً با ۳۰ عدد توپ نمی توان هیچ شکلی با توجه به این الگو ساخت.

فعالیت: در هریک از جمع های زیر، دو عدد زوج با یکدیگر جمع شده اند. با توجه به حاصل جمع ها، نکته ی زیر را کامل کنید.

$2 + 8 = 10$	$8 + 2 = 10$	$7 + 11 = 18$	$30 + 82 = 112$
$112 + 518 = 630$	$900 + 152 = 1052$	$108 + 352 = 460$	$12 + 12 = 24$

نکته: مجموع دو عدد زوج، همواره عددی زوج است.

فعالیت: در هریک از جمع های زیر، دو عدد فرد با یکدیگر جمع شده اند. با توجه به حاصل جمع ها، نکته ی زیر را کامل کنید.

$$1 + 3 = 4$$

$$11 + 17 = 28$$

$$135 + 531 = 666$$

$$793 + 1111 = 1904$$

$$221 + 221 = 442$$

$$999 + 123 = 1122$$

نکته: مجموع دو عدد فرد، همواره عددی است.

فعالیت: در هر یک از جمع های زیر، یک عدد زوج با یک عدد فرد جمع شده است. با توجه به حاصل جمع ها، نکته ی زیر را کامل کنید.

$$1 + 2 = 3$$

$$11 + 42 = 53$$

$$125 + 512 = 637$$

$$999 + 202 = 1201$$

$$554 + 455 = 1009$$

$$777 + 888 = 1665$$

نکته : مجموع هر عدد زوج با هر عدد فرد، همواره عددی است.

نکته:

۱- اگر در یک ماشین حساب دکمه های + و ۲ را بزنی و سپس به طور متوالی دکمه ی = را فشار دهیم، به ترتیب عددهای ۴، ۶، ۸، ۱۰ و ... یعنی همان عددهای زوج بزرگ تر از ۲ نمایش داده می شود.

۲- اگر در یک ماشین حساب دکمه های ۲ و + و ۱ را بزنی و سپس به طور متوالی دکمه ی = را فشار دهیم، به ترتیب عددهای ۳ و ۵ و ۷ و ۹ و ... یعنی همان عددهای فرد بزرگ تر از یک نمایش داده می شود.

درس دوم - یادآوری عدد نویسی

پیش از این با جدول ارزش مکانی آشنا شده اید. برای خواندن عدد ۲۰۱۶۱۳۹۴، این عدد را در جدول ارزش مکانی قرار می دهیم.

طبقه											
هزار				صدها				دهگان			
یک	دهگان	صدگان	هزار	یک	دهگان	صدگان	هزار	یک	دهگان	صدگان	هزار
۴	۹	۳	۱	۶	۱	۰	۲				

ارزش مکانی رقم ۲، دهگان میلیون است که در این عدد هشت رقمی بیشترین ارزش مکانی را دارد.

ارزش مکانی رقم ۶، دهگان هزار است. ارزش مکانی رقم ۳، صدگان است.

نکته: هر چه قدر به سمت راست جدول ارزش مکانی حرکت کنیم، ارزش مکانی رقم ها کم تر می شود.

عدد ۲۰۱۶۱۳۹۴ خوانده می شود: بیست میلیون و صد و شصت هزار و سیصد و نود و چهار.

مثال: عدد ۹۸۷۶۵۳۴۲۱۰ را به حرف بنویسید.

پاسخ: ابتدا عدد را از سمت راست، سه رقم سه رقم دسته بندی می کنیم و سپس با توجه به طبقه ی آن ها، عدد را می خوانیم.

۹	۸۷۶	۵۳۴	۲۱۰
↑	↑		
میلیارد	میلیون	هزار	

نه میلیارد و هشتصد و هفتاد و شش میلیون و پانصد و چهل و سه هزار و دویست و ده.

گسترده نویسی اعداد

مثال: گسترده ی اعداد زیر را بنویسید.

الف ۳۹۵ **ب** ۴۷۰۵۳

الف ۳ ۹ ۵ $= 3 \times 100 + 9 \times 10 + 5 \times 1$

تعداد صدتایی تعداد ده تایی تعداد یکی
(۳×۱۰۰) (۹×۱۰) (۵×۱)

ب ۴ ۷ ۰ ۵ ۳ $= 4 \times 10000 + 7 \times 1000 + 5 \times 10 + 3 \times 1$

تعداد ده هزار تایی تعداد هزار تایی تعداد ده تایی تعداد یکی

مثال: گسترده ی عدد ۴۹/۱۵۶ را بنویسید.

پاسخ:

هزارم (۰/۰۰۱)	صدم (۰/۰۱)	دهم (۰/۱)	یکی	ده تایی
۶	۵	۱	۹	۴

$49/156 = 4 \times 10 + 9 \times 1 + 1 \times 0/1 + 5 \times 0/01 + 6 \times 0/001$

مقایسه ی عددهای صحیح

برای مقایسه ی دو عدد، ابتدا به تعداد رقم های آن ها توجه می کنیم. هر عددی که تعداد رقم هایش بیشتر باشد، بزرگ تر است.

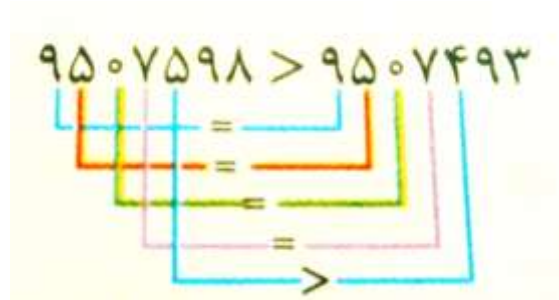
$$10000 > 9876$$

مثال:

در صورت مساوی بودن تعداد رقم ها، از اولین رقم سمت چپ (رقمی که بیشترین ارزش مکانی را دارد) مقایسه را شروع می کنیم و به سمت راست حرکت می کنیم تا به رقم های دارای ارزش مکانی مساوی و مقدارهای متفاوت برسیم.

مثال: دو عدد ۹۵۰۷۴۹۳ و ۹۵۰۷۵۹۸ را با هم مقایسه کنید.

پاسخ:



به مثال های زیر خیلی توجه کنید.

مثال: بزرگ ترین عدد چهاررقمی را بنویسید.

پاسخ: ۹۹۹۹

مثال: بزرگ ترین عدد چهاررقمی، بدون تکرار رقم ها را بنویسید.

پاسخ: ۹۸۷۶ (به ترتیب قرار گرفتن رقم ها دقت کنید.)

مثال: کوچک ترین عدد پنج رقمی را بنویسید.

پاسخ: ۱۰۰۰۰

مثال: کوچک ترین عدد پنج رقمی بدون تکرار رقم ها را بنویسید.

پاسخ: ۱۰۲۳۴ (به ترتیب قرار گرفتن رقم ها دقت کنید.)

مثال: با رقم های ۰ و ۱ و ۲ کوچک ترین عدد هفت رقمی زوج را بنویسید.

پاسخ: ۱۰۰۰۰۰۲ (توجه کنید که اگر رقم ۲ غیر از مرتبه ی یکان در هر مرتبه ای قرار می گرفت، دیگر عدد کوچک ترین نمی شد.)

یادآوری عددنویسی ۲

در سال های گذشته با نوشتن اعداد به رقم و حروف، جایگذاری رقم های یک عدد در جدول ارزش مکانی و همچنین خواندن آن ها و سپس گسترده نویسی عددها آشنا شدید که در اینجا به یادآوری آن ها می پردازیم.

جدول ارزش مکانی

میلیارد			میلیون			هزار			یکی			قسمت اعشاری			
ص	د	ی	ص	د	ی	ص	د	ی	ص	د	ی	د	ص	ه	ص
	۲	۷	۰	۰	۴	۰	۶	۳	۰	۰	۲	۰	۳	۴	

در این جدول، بالاترین ردیف نشان دهنده ی طبقه ی اعداد است. همچنین منظور از حرف «ی» همان یکان، حرف «د» همان دهگان و حرف «ص» همان صدگان می باشد.

توجه داشته باشید که در یک جدول ارزش مکانی، ممکن است نام طبقه ی یکی ها، نوشته نشود.

برای خواندن یک عدد از روی جدول ارزش مکانی، کافی است که از بزرگ ترین طبقه شروع کنیم و عدد مربوط به هر طبقه را نوشته و پس از آن، نام طبقه را به همراه یک «و» بنویسیم، در ضمن نام طبقه ی یکی، نوشته نمی شود. به این ترتیب عدد موجود در جدول بالا را به صورت زیر می خوانیم:

بیست و هفت	میلیارد و	چهار	میلیون و	شصت و سه	هزار و	دو	و	سی و چهار	هزارم
عدد طبقه میلیارد	نام طبقه	عدد طبقه میلیون	نام طبقه	عدد طبقه هزار	نام طبقه	عدد طبقه یکی	نام طبقه	عدد طبقه	قسمت اعشاری

در عدد بالا، بزرگ ترن رقم، یکان میلیارد می باشد.

نکته: با ارزش ترین رقم هر عدد، اولین رقم در سمت چپ آن و کم ارزش ترین رقم هر عدد، اولین عدد سمت راست آن عدد می باشد.

۲۷۰۰۴۰۶۳۰۰۲/۰۳۴	
کم ارزش ترین رقم (اولین رقم سمت راست)	باز ارزش ترین رقم (اولین رقم سمت چپ)

برای تعیین طبقه یا مرتبه ی یک رقم در یک عدد، بهتر است که آن عدد را در یک جدول ارزش مکانی قرار دهیم. البته می توانیم بدون جدول هم این کار را انجام دهیم. به این ترتیب که از سمت راست و از یکان عدد، سه رقم جدا کنیم و بین قسمت های جدا شده، علامت «و» قرار دهیم تا عدد مربوطه به هر طبقه مشخص شود.

مثال ۱: عدد $۸۳۵۰۰۱۷۳۴۶/۵۲۸۱$ را با حروف بنویسید، سپس مرتبه ی هر یک از ارقام ۷، ۴ و ۲ را مشخص کنید. ابتدا از یکان عدد (یعنی ۶) به سمت چپ، سه رقم سه رقم جدا می کنیم:

$$۸۳۵۰۰۱۷۳۴۶/۵۲۸۱ \xrightarrow{\text{جداسازی}} \begin{array}{c} \text{قسمت اعشاری} \\ \text{یکی} \\ \text{هزار} \\ \text{میلیون} \\ \text{میلیارد} \end{array} \begin{array}{c} ۸ \\ , \\ ۳۵۰ \\ , \\ ۰۱۷ \\ , \\ ۳۴۶ \\ / \\ ۵۲۸۱ \end{array}$$

پس عدد فوق را به صورت زیر می نویسیم و می خوانیم:

هشت میلیارد و سیصد و پنجاه میلیون و هفتصد و هشتاد و چهار هزار و سیصد و چهل و شش	هفتصد و هشتاد و چهار هزار و سیصد و چهل و شش	پنج هزار و دویست و هشتاد و یک هزارم
نام طبقه: هشت میلیارد	نام طبقه: هزار و سیصد و چهل و شش	نام طبقه: هفتصد و هشتاد و چهار هزار و سیصد و چهل و شش
عدد طبقه: ۸۳۵۰۰۱۷۳۴۶	عدد طبقه: ۳۵۰	عدد طبقه: ۰۱۷۳۴۶
مرتبه: میلیارد	مرتبه: هزار	مرتبه: یکی
قسمت اعشاری		

رقم ۷ در مرتبه ی یکان طبقه ی هزار، رقم ۴ در مرتبه ی دهگان طبقه ی یکی و رقم ۲ در مرتبه ی صدم طبقه ی اعشاری قرار دارد.

نکته: در نوشتن یک عدد با یک تعداد رقم داده شده، رقم صفر نمی تواند با ارزش ترین مکان، یعنی اولین رقم سمت چپ عدد قرار بگیرد، چون صفر پشت عدد، خوانده نمی شود.

مثال ۲: با شماره های ۰ و ۱ و ۳ و ۴ و ۶ و ۷ و ۸ هر یک از عددهای خواسته شده را هم با رقم و هم با حروف بنویسید.

الف) کوچک ترین عدد هفت رقمی

$$۱۰۳۴۶۷۸ \xrightarrow{\text{جداسازی}} \begin{array}{c} \text{یکی} \\ \text{هزار} \\ \text{میلیون} \end{array} \begin{array}{c} ۱ \\ , \\ ۰۳۴ \\ , \\ ۶۷۸ \end{array} \xrightarrow{\text{بـ حروف}} \text{یک میلیون و سی و چهار هزار و ششصد و هفتاد و هشت}$$

ب) بزرگ ترین عدد هفت رقمی فرد

$$۸۷۶۴۳۰۱ \xrightarrow{\text{جداسازی}} \begin{array}{c} \text{یکی} \\ \text{هزار} \\ \text{میلیون} \end{array} \begin{array}{c} ۸ \\ , \\ ۷۶۴ \\ , \\ ۳۰۱ \end{array} \xrightarrow{\text{بـ حروف}} \text{هشت میلیون و هفتصد و شصت و چهار هزار و سیصد و یک}$$

ج) کوچک ترین عدد پنج رقمی زوج

$$۱۰۳۴۶ \xrightarrow{\text{جداسازی}} \begin{array}{c} \text{یکی} \\ \text{هزار} \end{array} \begin{array}{c} ۱۰ \\ , \\ ۳۴۶ \end{array} \xrightarrow{\text{بـ حروف}} \text{ده هزار و سیصد و چهل و شش}$$

جدول ارزش مکانی مربوط به نمایش یک عدد را می توانیم به صورت زیر هم نمایش دهیم و با استفاده از این جدول، هر عددی را به صورت گسترده ی آن هم بنویسیم. به این ترتیب که عدد مورد نظر را در جدول جایگذاری نموده و به ترتیب رقم های آن را با توجه به مرتبه ی آن ها، با هم جمع کنیم. دقت داشته باشید که اگر رقم مربوط به یکی از مرتبه ها، صفر باشد، آن را در گسترده ی عدد نمی نویسیم.

هزارم	صدم	دهم	یکی	دهتایی	صدتایی	هزارتایی	ده هزارتایی	صدهزارتایی	میلیون	ده میلیون

مثال ۳: عدد $43507018/049$ را به صورت گسترده بنویسید.

ابتدا عدد را در جدول ارزش مکانی جایگذاری می کنیم و به ترتیب هر رقم را در مرتبه ی آن ضرب نموده و در آخر همگی آن ها با هم جمع می کنیم.

هزارم	صدم	دهم	یکی	دهتایی	صدتایی	هزارتایی	ده هزارتایی	صدهزارتایی	یک میلیون تایی	ده میلیون تایی
۹	۴	۰	۸	۱	۰	۷	۰	۵	۳	۴
$40000000 + 3000000 + 500000 + 7000 + 100 + 80 + 0/04 + 0/009$										

نمایش تقریبی اعداد روی محور

در سال های قبل با نمایش تقریبی اعداد با تقریب های دهگان، صدگان، هزارگان و ... آشنا شدید. در این درس می خواهیم شما را با نمایش تقریبی با تقریب های خیلی بزرگ مانند ده میلیون و بزرگ تر از آن آشنا کنیم. به مثال های زیر دقت کنید:



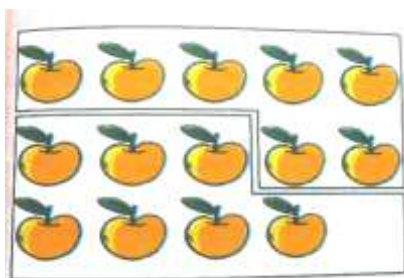
از آن جا که در محور بالا تقریب با رقم دهگان میلیون مورد نظر است، پس نقطه ی (م) روی این محور تقریباً عدد ۹ میلیون را نمایش می دهد. همچنین نقطه ی (ه) نیز تقریباً عدد ۳۲ میلیون و نقطه ی (ط) نیز تقریباً عدد

۶۵ میلیون را نمایش می دهد. برای نمایش عددی مانند ۴۷۸۶۳۷۰۲ بهتر است ابتدا آن را به صورت تقریبی ۴۸۰۰۰۰۰۰ یا همان ۴۸ میلیون بنویسیم، سپس محل تقریبی این عدد را با یک فلش روی محور نمایش دهیم. در محور زیر نیز تقریب با رقم صدگان میلیارد مورد نظر است. بنابراین نقاط (ی)، (ن)، (ل) و (ک) روی این محور به ترتیب، تقریباً عددهای ۳۵۰ میلیارد، ۴۹۰ میلیارد، ۶۲۰ میلیارد و ۷۳۰ میلیارد را نشان می دهد.



درس سوم - بخش پذیری

بخش پذیری ۱



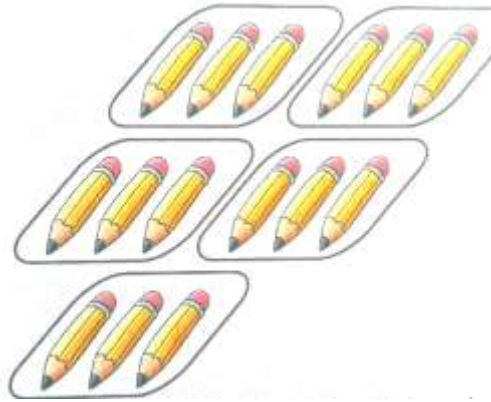
اگر بخواهیم ۱۴ سیب را بین دو نفر تقسیم کنیم، به هر کدام ۷ سیب می رسد و سیمی باقی نمی ماند، بنابراین می گوییم عدد ۱۴ بر ۲ بخش پذیر است.

اگر ۲۶ شکلات را بین دو نفر تقسیم کنیم، به هر یک ۱۳ شکلات می رسد و شکلاتی باقی نمی ماند، بنابراین می گوییم ۲۶ بر ۲ بخش پذیر است.



عددی بر ۲ بخش پذیر است که رقم یکان آن ۰، ۲، ۴، ۶ یا ۸ باشد.

اگر ۱۵ مداد را بین ۵ نفر تقسیم کنیم، بر هر کدام ۳ مداد می رسد و مدادی باقی نمی ماند، بنابراین می گوییم ۱۵ بر ۵ بخش پذیر است.



اگر ۳۵۰ دفتر را بین ۵ نفر تقسیم کنیم، به هر یک ۷۰ دفتر می رسد و دفتری باقی نمی ماند، بنابراین می گوییم عدد ۳۵۰ بر ۵ بخش پذیر است.

$$\begin{array}{r} 350 \overline{) 5} \\ -350 \\ \hline 0 \end{array}$$

عددی بر ۵ بخش پذیر است که رقم یکان آن صفر یا ۵ باشد.

هر عددی که بر ۲ بخش پذیر باشد، مضرب ۲ است.

هر عددی که بر ۵ بخش پذیر باشد، مضرب ۵ است.

اگر عددی هم بر ۲ و هم بر ۵ بخش پذیر باشد، آن عدد بر ۱۰ بخش پذیر است.

رقم یکان اعدادی که هم بر ۲ و هم بر ۵ بخش پذیرند، یا رقم یکان اعدادی که بر ۱۰ بخش پذیرند، صفر است.

مثال: اعداد مقابل بر ۲ و ۵ بخش پذیرند. ۷۵۳۰ و ۲۶۸۰ و ۱۰۰

نکته: باقی مانده ی تقسیم یک عدد بر ۲، یا صفر است یا ۱. اگر عدد زوج باشد، باقی مانده صفر و اگر عدد فرد باشد، باقی مانده ۱ می شود.

مثال: باقی مانده ی تقسیم اعداد مقابل بر ۲، مساوی ۱ است. ۲۴۶۸۹ و ۹۷۳ و ۱۳۹۵

برای تعیین باقی مانده ی تقسیم یک عدد بر ۵، فقط کافی است که باقی مانده ی تقسیم رقم یکان آن را بر ۵ حساب کنیم.

مثال: باقی مانده ی تقسیم عدد ۱۳۵۹ را بر ۵ حساب کنید.

$$\begin{array}{r} 9 \overline{) 5} \\ -5 \\ \hline 0 \end{array} \rightarrow \text{باقی مانده}$$

پاسخ: باقی مانده ی تقسیم رقم یکان عدد، یعنی ۹ را بر ۵ حساب می کنیم.

عددی بر ۳ بخش پذیر است که جمع رقم هایش بر ۳ بخش پذیر باشد.

مثال: عددهای مقابل بر ۳ بخش پذیرند. ۱۲۳۰ و ۳۰۰۰۰ و ۲۷۹ و ۱۰۰۲

عددی بر ۹ بخش پذیر است که مجموع رقم هایش بر ۹ بخش پذیر باشد.

مثال: عددهای مقابل بر ۹ بخش پذیرند. ۱۰۰۹۸ و ۳۱۶۸۷۲ و ۷۰۲۹ و ۱۰۸

پاسخ: برای محاسبه ی باقی مانده ی تقسیم یک عدد بر ۳، ابتدا حاصل جمع رقم های عدد را حساب می کنیم و سپس باقی مانده ی تقسیم این حاصل جمع بر ۳ را به دست می آوریم.

$$3+2+7+6+5=23 \rightarrow \begin{array}{r} 23 \overline{) 3} \\ -21 \\ \hline 2 \end{array} \rightarrow \text{باقی مانده}$$

مثال: باقی مانده ی تقسیم عدد ۳۲۷۶۵ را بر ۳ حساب کنید.

برای محاسبه ی باقی مانده ی تقسیم یک عدد بر ۹، ابتدا حاصل جمع رقم های عدد را حساب می کنیم و سپس باقی مانده ی تقسیم حاصل جمع را بر ۹ به دست می آوریم.

مثال: باقی مانده ی تقسیم عدد ۱۳۹۵۶ را بر ۹ حساب کنید.

پاسخ:

$$1+3+9+5+6=24 \rightarrow \begin{array}{r} 24 \overline{) 9} \\ -18 \\ \hline 6 \end{array} \rightarrow \text{باقی مانده}$$

باقی مانده ی تقسیم هر عدد بر ۱۰، برابر است با رقم یکان عدد.

مثال: باقی مانده ی تقسیم عدد ۹۵۳۷ بر ۱۰ برابر است با ۷ و باقی مانده ی تقسیم عدد ۲۰۱۶ بر ۱۰، برابر است با ۶.

عددی که هم بر ۲ و هم بر ۳ بخش پذیر باشد، بر ۶ نیز بخش پذیر است.

مثال: عددهای مقابل بر ۶ بخش پذیرند. ۱۵۳۶ و ۱۰۸ و ۲۰۱۰

عدد که هم بر ۳ و هم بر ۵ بخش پذیر باشد، بر ۱۵ نیز بخش پذیر است.

مثال: عددهای مقابل بر ۱۵ بخش پذیرند. ۲۱۱۳۵ و ۶۸۱۹۰ و ۲۱۰۰ و ۱۰۵

بخش پذیری ۲

می دانیم که اگر در تقسیمی باقی مانده صفر شود، آن گاه مقسوم علیه بخش پذیر است. در مثال زیر، عدد ۳۰ بر عدد ۵ بخش پذیر است.

$$\begin{array}{r} 30 \overline{) 5} \\ - 30 \\ \hline 0 \end{array}$$

آیا عدد ۷۲۳۵۴۲ بر ۵ بخش پذیر است؟

همان طور که ملاحظه می کنید تقسیم عدد ۷۲۳۵۴۲ بر ۵ کمی وقت گیر است، پس بهتر است به دنبال روشی باشیم تا بتوانیم بخش پذیری اعداد بر یک دیگر را سریع تر تشخیص دهیم.

در این درس می خواهیم شما را با قوانینی آشنا کنیم تا با استفاده از آن ها بتوانیم بخش پذیری عددها بر یک دیگر را سریع تر تشخیص دهید.

بخش پذیری بر ۲

با توجه به این که هر یک از دسته های ده تایی، صدتایی، هزارتایی و ... را می توان همواره به دو قسمت مساوی تقسیم کرد، برای بررسی بخش پذیری هر عدد بر ۲ کافی است که یکان آن عدد بر ۲ بخش پذیر باشد؛ یعنی رقم های دهگان، صدگان، هزارگان و مرتبه های بالاتر تأثیری در بخش پذیری اعداد بر ۲ ندارند.

نکته: عددی بر ۲ بخش پذیر است که رقم یکان آن ۰، ۲، ۴، ۶ و یا ۸ باشد. به عبارت دیگر، تمامی عددهای زوج بر ۲ بخش پذیر هستند.

مثال ۱: کدام یک از عددهای مقابل بر ۲ بخش پذیر هستند؟

۳۴۷ و ۳۵۷۸ و ۲۹۴۵ و ۷۲۳۴۸۱۰ و ۲۴۸۹۵۲ و ۲۴۶۸۰۳

یکان عددهای ۳۵۷۸، ۷۲۳۴۸۱۰ و ۲۴۸۹۵۲ زوج هستند. پس این اعداد به ۲ بخش پذیرند.

بخش پذیری بر ۳

در تقسیم هر بسته ی ده تایی، صدتایی، هزارتایی و ... بر ۳، همواره باقی مانده برابر یک است. بنابراین برای تعیین باقی مانده ی تقسیم عددی مانند ۴۵۳ بر ۳، با توجه به این که در این عدد ۴ دسته ی صدتایی، ۵ دسته ی ده تایی و ۳ تا یکی وجود دارد، کافی است که جمع ارقام آن را حساب کرده و بخش پذیری عدد حاصل را بر ۳ بررسی کنیم. در صورتی که جمع رقم های عدد مورد نظر بر ۳ بخش پذیر باشد، آن عدد بر ۳ بخش پذیر خواهد شد.

نکته: عددی بر ۳ بخش پذیر است که جمع رقم هایش بر ۳ بخش پذیر باشد.

مثال ۳: کدام یک از عددهای زیر بر ۳ بخش پذیر هستند؟ ۹۵۸۴۰ و ۸۰۰۰ و ۰۳۲ و ۲۵۸ و ۶۸۹ و ۱۴۳

کافی است که جمع رقم های هر یک از عددها را حساب کنیم. عددی بر ۳ بخش پذیر است که جمع رقم های آن بر ۳ بخش پذیر باشد.

۱۴۳	جمع رقم‌ها	$1+4+3=8 \Rightarrow$	۸ بر ۳ بخش پذیر نیست، پس ۱۴۳ بر ۳ بخش پذیر نمی باشد.
۶۸۹	جمع رقم‌ها	$6+8+9=23 \Rightarrow$	۲۳ بر ۳ بخش پذیر نیست، پس ۶۸۹ بر ۳ بخش پذیر نمی باشد.
۲۵۸	جمع رقم‌ها	$2+5+8=15 \Rightarrow$	۱۵ بر ۳ بخش پذیر است، پس ۲۵۸ بر ۳ بخش پذیر می باشد.
۱۰۳۲	جمع رقم‌ها	$1+0+3+2=6 \Rightarrow$	۶ بر ۳ بخش پذیر است، پس ۱۰۳۲ بر ۳ بخش پذیر می باشد.
۸۰۰۰۱	جمع رقم‌ها	$8+0+0+0+1=9 \Rightarrow$	۹ بر ۳ بخش پذیر است، پس عدد ۸۰۰۰۱ بر ۳ بخش پذیر می باشد.
۹۵۸۴۱۰	جمع رقم‌ها	$9+5+8+4+1+0=27 \Rightarrow$	۲۷ بر ۳ بخش پذیر است، پس عدد ۹۵۸۴۱۰ بر ۳ بخش پذیر می باشد.

نکته: اگر در بین ارقام عددی، رقم صفر هم وجود داشته باشد، در جمع رقم های آن عدد، نیازی به نوشتن صفر نیست، چون مجموع هر عددی با صفر، برابر صفر است.

بخش پذیری بر ۵

با توجه به این که هریک از دسته های ده تایی، صدتایی، هزارتایی و ... را می توانیم به ۵ قسمت مساوی تقسیم کنیم، برای بررسی بخش پذیری هر عدد بر ۵، کافی است که یکان آن عدد صفر یا ۵ باشد و رقم های دهگان، صدگان، هزارگان و مرتبه های بالاتر تأثیری در بخش پذیری اعداد بر ۵ ندارند.

نکته: عددی بر ۵ بخش پذیر است که رقم یکان آن عدد ۰ یا ۵ باشد.

مثال ۲: در بین اعداد زیر، کدام یک بر ۵ بخش پذیر هستند؟

۱۹۲۸۳۷۴۶۵ و ۳۴۹۷۶۰ و ۵۰۵۰۲ و ۹۸۰ و ۸۸۸۵ و ۵۵۵۸

رقم یکان عددهای ۸۸۸۵، ۹۸۰، ۳۴۹۸۶۰ و ۱۹۲۸۳۷۴۶۵ صفر یا ۵ است، لذا این عددها بر ۵ بخش پذیرند.

بخش پذیری بر ۶

اعدادی مانند ۱۲، ۱۸، ۲۴ و ... که مضرب های ۶ هستند بر ۶ بخش پذیرند. همان طور که ملاحظه می کنید، تمامی این عددها زوج هستند، از طرفی مجموع این عددها نیز بر ۳ بخش پذیرند، در نتیجه تمامی این عددها هم بر ۲ و هم بر ۳ بخش پذیرند.

نکته: اعدادی بر ۶ بخش پذیرند که هم بر ۲ و هم بر ۳ بخش پذیر باشند.

مثال ۵: کدام یک از عددهای زیر بر ۶ بخش پذیر هستند؟

۳۰۴۰۵۰ و ۸۰۰۰۲۰ و ۴۵۸۹ و ۷۰۲۰ و ۴۵۰ و ۲۳۶

عدد ۲۳۶ بر ۲ بخش پذیر است، اما بر ۳ بخش پذیر نیست (چرا؟)، پس این عدد بر ۶ بخش پذیر نمی باشد.

عدد ۴۵۰ هم بر ۲ و هم بر ۳ بخش پذیر است (چرا؟)، پس این عدد بر ۶ هم بخش پذیر است.

عدد ۷۰۲۰ هم بر ۲ و هم بر ۳ بخش پذیر است (چرا؟)، پس این عدد بر ۶ هم بخش پذیر است.

عدد ۴۵۸۹ عددی فرد است، پس بر ۲ بخش پذیر نیست. در نتیجه این عدد نمی تواند بر ۶ بخش پذیر باشد.

عدد ۸۰۰۰۲۰ بر ۳ بخش پذیر نیست (چرا؟)، در نتیجه این عدد نمی تواند بر ۶ بخش پذیر باشد.

عدد ۳۰۴۰۵۰ هم بر ۲ و هم بر ۳ بخش پذیر است، در نتیجه این عدد بر ۶ هم بخش پذیر می باشد.

بخش پذیری بر ۹

در تقسیم هر بسته ی ده تایی، صدتایی، هزارتایی و ... بر عدد ۹، همیشه باقی مانده مساوی یک می شود، بنابراین برای تعیین بخش پذیری عددی مانند ۲۰۷ بر ۹، با توجه به این که این عدد دارای دو دسته ی صدتایی و ۷ تا یکی است، باید جمع رقم های این عدد را حساب، و بخش پذیری عدد حاصل را بر ۹ بررسی کنیم.

نکته: عددی بر ۹ بخش پذیر است که جمع رقم هایش بر ۹ بخش پذیر باشد.

مثال ۴: کدام یک از عددهای زیر بر ۹ بخش پذیر است؟

۲۰۵۰۷۰۴ و ۱۰۱۰۰۷ و ۳۵۴۰۶ و ۲۷۴۹ و ۴۳۲

با توجه به قاعده ی بخش پذیری بر ۹، ابتدا جمع رقم های هر یک از عددها را حساب می کنیم؟

۹ بر ۹ بخش پذیر است، در نتیجه ۴۳۲ بر ۹ بخش پذیر است. $\Rightarrow 4+3+2=9$ جمع رقم ها

۲۲ بر ۹ بخش پذیر نیست، در نتیجه ۲۷۴۹ بر ۹ بخش پذیر نیست. $\Rightarrow 2+7+4+9=22$ جمع رقم ها

۱۸ بر ۹ بخش پذیر است، در نتیجه ۳۵۴۰۶ بر ۹ بخش پذیر است. $\Rightarrow 3+5+4+6=18$ جمع رقم ها

۹ بر ۹ بخش پذیر است، در نتیجه ۱۰۱۰۰۷ هم بر ۹ بخش پذیر است. $\Rightarrow 1+1+7=9$ جمع رقم ها

۱۸ بر ۹ بخش پذیر است، در نتیجه ۲۰۵۰۷۰۴ بر ۹ بخش پذیر است. $\Rightarrow 2+5+7+4=18$ جمع رقم ها

نکته: هر عددی که بر ۹ بخش پذیر باشد، حتما بر ۳ هم بخش پذیر است. اما بعضی از عددهایی که بر ۳ بخش پذیرند، بر ۹ بخش پذیر نیستند.

بخش پذیری بر ۱۰

هریک از عددهای ۹۳۷۰، ۳۵۸۴۰ و ۱۲۹۳۸۰ که رقم یکان آن ها صفر است، هم بر ۲ و هم بر ۵ بخش پذیرند. پس این عددها بر 2×5 یعنی ۱۰ نیز بخش پذیرند.

نکته:

- ۱- عددی بر ۱۰ بخش پذیر است که رقم یکان آن صفر باشد.
- ۲- اعدادی که هم بر ۲ و هم بر ۵ بخش پذیرند، بر ۱۰ هم بخش پذیرند.

بخش پذیری بر ۱۵

اعدادی مانند ۱۵، ۳۰، ۴۵، ۶۰ و ... که مضرب های ۱۵ هستند، بر این عدد بخش پذیرند. همان طور که ملاحظه می کنید تمامی این عددها هم بر ۳ و هم بر ۵ بخش پذیر هستند.

نکته: اعدادی بر ۱۵ بخش پذیرند که هم بر ۳ و هم بر ۵ بخش پذیر باشد.

مثال ۶: کدام یک از عددهای زیر بر ۱۵ بخش پذیرند؟

۴۳۲۵۷۶۰ و ۷۰۲۰۸۰ و ۸۹۴۶ و ۵۶۲۵ و ۲۳۴۰

عدد ۲۳۴۰ هم بر ۵ و هم بر ۳ بخش پذیر است (چرا؟)، در نتیجه این عدد بر ۱۵ هم بخش پذیر می باشد.

عدد ۵۶۲۵ هم بر ۳ و هم بر ۵ بخش پذیر است (چرا؟)، در نتیجه این عدد بر ۱۵ هم بخش پذیر می باشد.

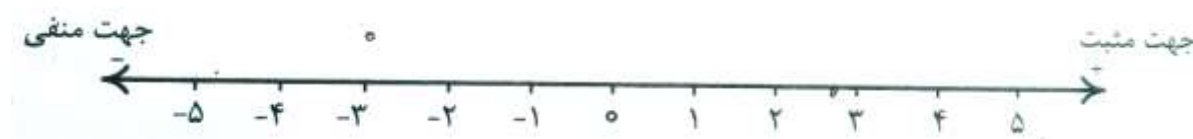
عدد ۸۹۴۶ بر ۵ بخش پذیر نیست (چرا؟)، پس این عدد نمی تواند بر ۱۵ بخش پذیر باشد.

عدد ۷۰۲۰۸۰ بر ۳ بخش پذیر نیست (چرا؟)، پس این عدد نمی تواند بر ۱۵ بخش پذیر باشد.

عدد ۴۳۲۵۷۶۰ هم بر ۳ و هم بر ۵ بخش پذیر است (چرا؟)، پس این عدد بر ۱۵ هم بخش پذیر می باشد.

درس چهارم - معرفی عددهای صحیح

محور اعداد زیر را در نظر بگیرید. نقطه ی مبدأ این محور را با عدد صفر نشان می دهیم. عددهای سمت راست صفر را عددهای صحیح مثبت و عددهای سمت چپ صفر را عددهای صحیح منفی می نامیم.



پس عددهای صحیح سه دسته هستند: عددهای صحیح مثبت که از صفر بزرگ تر هستند، عددهای صحیح منفی که از صفر کوچک تر هستند و عدد صفر که نه مثبت است و نه منفی.

اعداد صحیح مثبت < صفر < اعداد صحیح منفی

روی محور هر چه در جهت مثبت پیش برویم، عددهای بزرگ تر می شوند و هر چه به سمت چپ یعنی در جهت منفی پیش برویم، عددها کوچک تر می شوند؛ یعنی:

$$+1 < 0 \text{ و } 0 < -1 \text{ و } -1 < -2 \text{ و } -2 < -3 \text{ و } -3 < -4 \text{ و } -4 < -5$$

نکته: بزرگ ترین عدد صحیح منفی، عدد ۱- و کوچک ترین عدد صحیح منفی وجود ندارد.

نکته: کوچک ترین عدد صحیح مثبت، عدد ۱+ و بزرگ ترین عدد صحیح مثبت وجود ندارد (مشخص نیست).

علامت هر عدد را در سمت چپ آن قرار می دهیم؛ مانند عدد ۷+ یا ۵-.

« ۷+ » را می خوانیم « مثبت ۷ » و « ۵- » را می خوانیم « منفی ۵ ».

تذکر: اگر عددی علامت نداشته باشد، علامت آن مثبت در نظر گرفته می شود یا می توانیم برای عددهای مثبت،

$$+7 = 7 \text{ و } +6 = 6 \text{ یعنی: علامت آن ها را قرار ندهیم؛}$$

فاصله ی عدد ۲+ تا صفر با فاصله ی عدد ۲- تا صفر برابر است؛ به همین دلیل عدد ۲- را قرینه ی عدد ۲+ می گوئیم و به همین ترتیب قرینه ی عدد ۱۱+، عدد ۱۱- و قرینه ی عدد ۹۳-، عدد ۹۳+ است.

نکته: قرینه ی صفر، خود صفر است.

علامت قرینه در ریاضی، نماد « - » است.

مثال:

$$+4 \text{ قرینه ی } 4 = -(+4) = -4 \quad -5 \text{ قرینه ی } 5 = -(-5) = +5$$
$$+4 \xrightarrow{\text{قرینه}} -4 \quad -5 \xrightarrow{\text{قرینه}} +5$$

یعنی هر عددی را که قرینه کنیم، علامت آن تغییر می کند.

نکته: قرینه ی قرینه ی هر عدد برابر است با خود عدد.

مثال:

$$-5 \text{ قرینه ی قرینه ی } 5 = -(-(-5)) = -5 \quad , \quad +3 \text{ قرینه ی قرینه ی } 3 = -(-(+3)) = +3$$
$$-5 \xrightarrow{\text{قرینه}} +5 \xrightarrow{\text{قرینه}} -5$$

معرفی اعداد صحیح ۲

گاهی اوقات شما با جملاتی مانند « دمای هوای تهران ۴ درجه بالای صفر است » یا « دمای هوای اردبیل ۴ درجه زیر صفر است » و همچنین « ارتفاع تهران از سطح دریا ۱۱۹۰ متر بالاتر است » یا « ارتفاع دریای بحرالمیت از سطح دریا ۴۲۲ متر پایین تر است » مواجه شده اید. چه تفاوتی بین دمای بالاتر از صفر یا پایین تر از صفر وجود دارد؟

همان طور که می دانید، مفهوم ۴ درجه بالای صفر با مفهوم ۴ درجه زیر صفر متفاوت است. لذا برای نمایش تفاوت این دو عدد و همچنین ساده و مختصر کردن آن ها، از علامت های + یا - استفاده می کنیم و طبق قرارداد باید اعدادی که دمای بالاتر از صفر یا ارتفاع بالاتر از سطح دریا را نشان می دهند، با علامت + (مثبت)، و اعدادی که دمای پایین تر از صفر و یا ارتفاع پایین تر از سطح دریا را نشان می دهند، با علامت - (منفی) نمایش دهیم.

$4 = +4$ درجه بالای صفر

$4 = -4$ درجه زیر صفر

$7 = +7$ متر بالاتر از سطح دریا

$7 = -7$ متر پایین تر از سطح دریا

دقت داشته باشید که ارتفاع سطح دریا را مساوی صفر در نظر می گیریم.

برای تعیین علامت عددها نیاز داریم که محل مبدأ، واحد اندازه گیری و جهت مثبت و منفی را قرارداد کنیم و بر اساس آن، عددها را علامت دار کنیم. در مثال ارتفاع از سطح دریا، سطح دریا را مبدأ در نظر گرفته و ارتفاع آن را مساوی صفر در نظر می گیریم. همچنین در مثال دمای هوای نیز، خود صفر را به عنوان مبدأ در نظر می گیریم.

عدد صحیح

عددهای ... و $4+$ و $3+$ و $2+$ و $1+$ و 0 و $1-$ و $2-$ و $3-$ و $4-$ و ... را عددهای صحیح می نامیم.

اعداد صحیح به سه دسته ی مهم تقسیم می شوند:

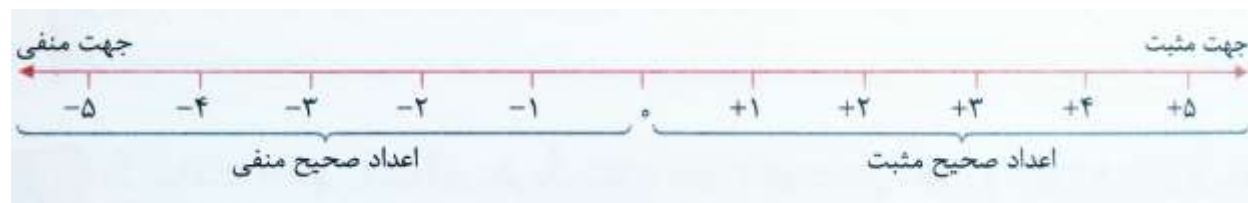
۱- اعداد صحیح مثبت که شامل عددهای $1+$ و $2+$ و $3+$ و $4+$ و ... می باشند.

۲- عدد صفر که نه مثبت است و نه منفی.

۳- اعداد صحیح منفی که شامل عددهای $1-$ و $2-$ و $3-$ و $4-$ و ... می باشند.

محور اعداد صحیح

در ریاضی برای یکی شدن قراردادهای و همچنین نمایش عددها روی محور اعداد، سمت راست صفر را روی محور مثبت و سمت چپ صفر را منفی در نظر می گیریم.



نکته: در نمایش عددهای مثبت، می توانیم علامت مثبت را ننویسیم، یعنی $5 = 5 -$ است.

مقایسه ی عددهای صحیح

بر روی محور اعداد صحیح هر چه به سمت راست (یعنی به سمت مثبت ها) پیش برویم، عددها بزرگ تر می شوند و هر چه به سمت چپ (یعنی به سمت منفی ها) پیش برویم، عددها کوچک تر می شوند. بنابراین عدد -3 از عدد -5 بزرگ تر است ($-3 > -5$) و یا عدد $+1$ از عدد -1000 بزرگ تر است ($+1 > -1000$). طبق گفته های بالا داریم:

عددهای صحیح مثبت $<$ صفر $<$ عددهای صحیح منفی

نکته:

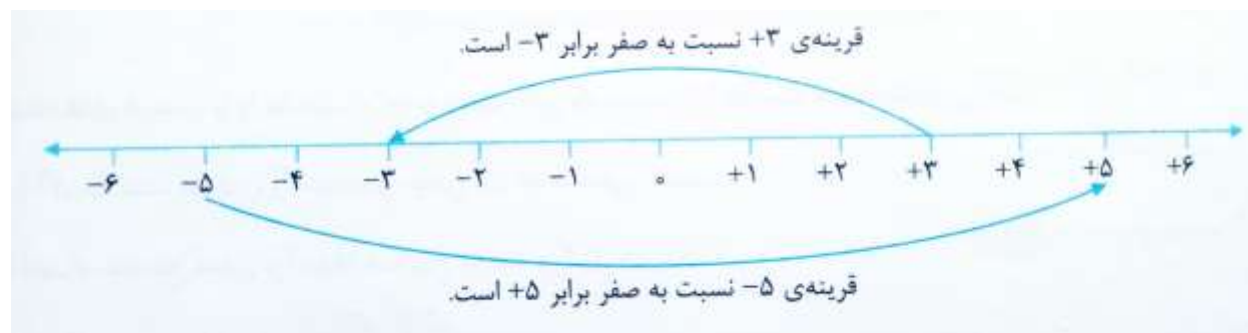
۱- هر عدد صحیح مثبت از هر عدد صحیح منفی، بزرگ تر است.

۲- همه ی عددهای صحیح مثبت، از صفر بزرگ تر هستند.

۳- همه ی عددهای صحیح منفی، از صفر کوچک تر هستند.

قرینه ی اعداد صحیح

در سال گذشته با مفهوم قرینه نسبت به یک نقطه آشنا شدید. در محور زیر اگر بخواهیم قرینه ی عدد $+3$ را نسبت به مبدأ که همان نقطه ی صفر است، مشخص کنیم، عدد -3 به دست می آید.



همان طور که ملاحظه می کنید، برای قرینه کردن هر عددی نسبت به صفر (مبدأ)، کافی است که علامت آن را تغییر دهیم، یعنی علامت مثبت را به منفی و علامت منفی را به مثبت تبدیل کنیم.

$-11 =$ قرینه ی عدد $+11$ و $+7 =$ قرینه ی عدد (-7)

نکته: قرینه ی صفر، برابر خود صفر است. عدد صفر تنها عددی است که قرینه اش با خودش برابر است.

مثال ۱: اگر ساعت ۱۲ ظهر را مبدأ در نظر بگیریم، با تعیین جهت های مثبت و منفی، هر یک از زمان های زیر را با یک عدد صحیح نمایش دهید.

۱- ۲۳ دقیقه قبل از ظهر: ۲۳ دقیقه قبل از ظهر یعنی ۲۳-

۲- ۴۷ دقیقه بعد از ظهر: ۴۷ دقیقه بعد از ظهر یعنی ۴۷+

۳- یک ساعت و ۷ دقیقه قبل از ظهر: یک ساعت و ۷ دقیقه قبل از ظهر یعنی ۶۷ دقیقه قبل از ظهر که آن را به صورت ۶۷- نمایش می دهیم.

۴- ۲ ساعت و ۲۳ دقیقه ی بعد از ظهر: ۲ ساعت و ۲۳ دقیقه بعد از ظهر یعنی ۱۴۳ دقیقه بعد از ظهر که آن را به صورت ۱۴۳+ نمایش می دهیم.

۵- ساعت ۱۲:۳۶ : ساعت ۱۲:۳۶ یعنی ۳۶ دقیقه بعد از ظهر که آن را به صورت ۳۶+ نمایش می دهیم.

۶- ساعت ۱۱:۴۵ : ساعت ۱۱:۴۵ یعنی ۱۵ دقیقه قبل از ظهر که آن را به صورت ۱۵- نمایش می دهیم.

مثال ۲: در هر یک از شکل های زیر، عقربه چه عددی را نمایش می دهد؟



مریم عزیزی

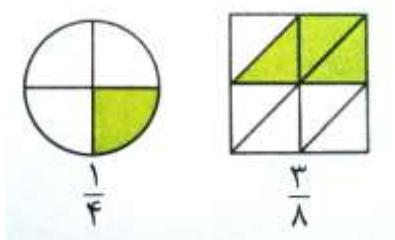
ریاضی ششم دبستان

فصل ۲- کسر

درس اول - جمع و تفریق کسرها

مفهوم کسر

به جزئی یا قسمتی از یک واحد کامل، کسری از آن واحد گفته می شود، بنابراین کسری از کل یعنی جزئی یا قسمتی از آن کل.



در شکل مقابل $\frac{1}{4}$ دایره و $\frac{3}{8}$ مربع رنگ شده است.

$\frac{1}{4}$ یعنی یک قسمت از ۴ قسمت مساوی.

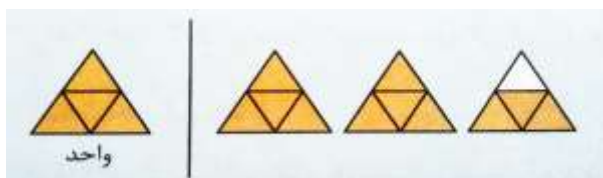
$\frac{3}{8}$ یعنی سه قسمت از ۸ قسمت مساوی.

عدد مخلوط

اگر صورت کسر بزرگ تر از واحدی، بر مخرجش بخش پذیر نباشد، آن کسر را می توان به صورت عدد مخلوط (ترکیبی از عدد صحیح و کسر) نوشت.

مثال: عدد مخلوط $2\frac{3}{4}$ را به وسیله ی شکل نمایش دهید.

پاسخ:



عدد مخلوط $2\frac{3}{4}$ با کسر $\frac{11}{4}$ برابر است.

نکته: شکل درست یک عدد مخلوط، این است که حتما کسر نوشته شده در عدد مخلوط، کوچک تر از واحد باشد.

مثال: شکل درست عدد مخلوط $3\frac{5}{2}$ را بنویسید.

پاسخ:

$$\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2} \rightarrow 3\frac{5}{2} = 3 + 2\frac{1}{2} = 5\frac{1}{2}$$

کسره‌های مساوی

اگر صورت و مخرج کسری را در عدد طبیعی بزرگ تر از ۱ ضرب و یا بر عدد طبیعی بزرگ تر از یک تقسیم کنیم، کسری مساوی کسر اولیه به دست می آید.

کسر $\frac{3}{4}$ با کسر $\frac{15}{20}$ مساوی است.

برای هر کسر، بی شمار کسر مساوی می توان نوشت:

کوچک ترین مخرج مشترک دو یا چند کسر

اگر دو یا چند کسر داشته باشیم و بزرگ ترین مخرج این کسرها، بر بقیه ی مخرج ها بخش پذیر باشد، همان مخرج بزرگ تر، کوچک ترین مخرج مشترک کسرها می شود.

مثال: کوچک ترین مخرج مشترک کسرهای $\frac{5}{42}$ ، $\frac{11}{21}$ ، $\frac{3}{14}$ ، $\frac{6}{7}$ و $\frac{5}{6}$ را بیابید.

پاسخ: چون ۴۲ بر تمامی مخرج ها بخش پذیر است، پس کوچک ترین مخرج مشترک این کسرها، عدد ۴۲ است.

اگر مخرج بزرگ تر بر بقیه ی مخرج ها بخش پذیر نبود، می توان با نوشتن کسرهای مساوی برای دو یا چند کسر داده شده، کوچک ترین مخرج مشترک آن ها را بیابیم.

مثال: کوچک ترین مخرج مشترک دو کسر $\frac{3}{4}$ و $\frac{5}{6}$ را بنویسید.

پاسخ:

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16}$$

$$\frac{5}{6} = \frac{10}{12} = \frac{15}{18}$$

همان طور که می بینید، عدد ۱۲ کوچک ترین مخرج مشترک دو کسر است.

روش بهتر برای یافتن کوچک ترین مخرج مشترک دو کسر، این است که اگر بزرگ ترین مخرج بر دیگر مخرج ها بخش پذیر نبود، آن را در عددهای ۲، ۳، ۴، ۵ و ... به ترتیب ضرب کنیم تا جایی که بر مخرج یا مخرج های دیگر بخش پذیر شود.

مثال: کوچک ترین مخرج مشترک دو کسر $\frac{3}{10}$ و $\frac{4}{15}$ را بیابید.

پاسخ: عدد ۳۰ بر ۱۰ بخش پذیر است، پس کوچک ترین مخرج مشترک $\frac{3}{10}$ و $\frac{4}{15}$ عدد ۳۰ است.

$$15 \times 2 = 30 \rightarrow$$

مقایسه ی کسرها

✓ الف: اگر دو کسر دارای مخرج های مساوی باشند، کسری بزرگ تر است که صورتش بزرگ تر باشد.

مثال: $\frac{5}{7} > \frac{2}{7}$ $\frac{3}{11} < \frac{9}{11}$

✓ ب: اگر دو کسر دارای صورت های مساوی باشند، کسری بزرگ تر است که مخرجش کوچک تر باشد.

مثال: $\frac{3}{4} > \frac{3}{5}$ $\frac{9}{5} < \frac{9}{7}$

✓ ج: اگر دو کسر، نه صورت های برابر و نه مخرج های برابر داشته باشند، ابتدا دو کسر را هم مخرج و یا هم صورت می کنیم و سپس آن ها را مقایسه می کنیم.

مثال:

(در این جا دو کسر را هم مخرج کرده ایم.) $\frac{3}{4} \text{ و } \frac{5}{6} \rightarrow \frac{3 \times 3}{4 \times 3} \text{ و } \frac{5 \times 2}{6 \times 2} \rightarrow \frac{9}{12} \text{ و } \frac{10}{12} \rightarrow \frac{9}{12} < \frac{10}{12}$

نکته: برای مقایسه ی دو کسر که صورت های آن ها برابر نباشند و مخرج های آن ها نیز برابر نباشند، از روش ساده تری به نام روش ضرب دری یا طرفین وسطین می توان استفاده کرد.

$6 \times 5 = 30 > 4 \times 7 = 28$

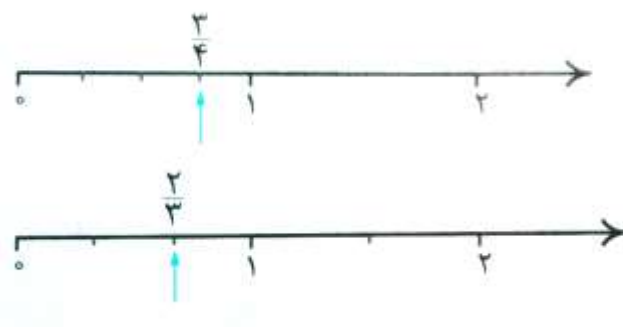
$\frac{5}{7} \text{ و } \frac{4}{6} \rightarrow 30 > 28 \rightarrow \frac{5}{7} > \frac{4}{6}$

مقایسه ی کسرها توسط محور

در این روش دو محور رسم می کنیم که دقیقا واحدهای هم اندازه داشته باشند و صفرهای دو محور دقیقا زیر هم قرار گیرند.

مثال: کسرهایی $\frac{2}{3}$ و $\frac{3}{4}$ را روی محور مقایسه کنید.

پاسخ:



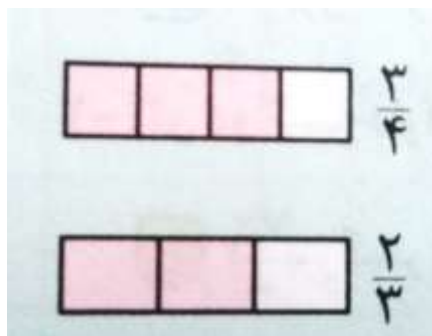
$$\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$$

مقایسه ی دو کسر توسط شکل

در این روش دو واحد برابر انتخاب می کنیم و سپس با توجه به مخرج کسرها، آن ها را به قسمت های مساوی تقسیم کرده و سپس کسرها را روی شکل مشخص و مقایسه می کنیم.

مثال: کسرهایی $\frac{2}{3}$ و $\frac{3}{4}$ را با شکل مقایسه کنید.

پاسخ: طبق شکل مقابل: $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$



جمع و تفریق کسرها

به طور کلی در جمع و تفریق کسرها، باید مخرج ها مساوی باشند و اگر مخرج ها مساوی نبودند، با استفاده از کوچک ترین مخرج مشترک آن ها، مخرج هایشان را مساوی می کنیم.

مثال: حاصل جمع و تفریق های زیر را حساب کنید.

$\frac{2}{13} + \frac{4}{13} =$	$\frac{4}{9} + \frac{2}{9} =$	$\frac{6}{11} - \frac{4}{11} =$
$\frac{2}{13} + \frac{4}{13} = \frac{2+4}{13} = \frac{6}{13}$	$\frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4+2}{9} = \frac{6}{9}$	$\frac{6}{11} - \frac{4}{11} = \frac{6-4}{11} = \frac{2}{11}$

مثال: حاصل عبارت های زیر را حساب کنید و به ساده ترین صورت بنویسید.

$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{5}{12} =$	$\frac{4}{9} - \frac{2}{15} =$
--	--------------------------------

پاسخ:

$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{5}{12} =$
$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{5}{12} = \frac{8}{12} + \frac{3}{12} + \frac{5}{12} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$
$\frac{4}{9} - \frac{2}{15} = \frac{20}{45} - \frac{6}{45} = \frac{20-6}{45} = \frac{14}{45}$

جمع اعداد مخلوط

برای جمع اعداد مخلوط، بهتر است عددهای صحیح را با هم و کسرها را نیز با هم جمع کنیم.

مثال: حاصل عبارت مقابل را حساب کنید.

$$2\frac{2}{5} + 3\frac{1}{3} =$$

$$2\frac{2}{5} + 3\frac{1}{3} = (2+3) + \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\right) = 5 + \frac{6}{15} + \frac{5}{15} = 5\frac{11}{15}$$

تفریق اعداد مخلوط

مانند جمع اعداد مخلوط، بهتر است که در تفریق هم، عددهای صحیح را از هم کم کنیم و کسرها را نیز از هم تفریق کنیم.

مثال: حاصل عبارت های زیر را حساب کنید.

$$\text{الف)} \quad 5\frac{3}{4} - 2\frac{2}{3} =$$

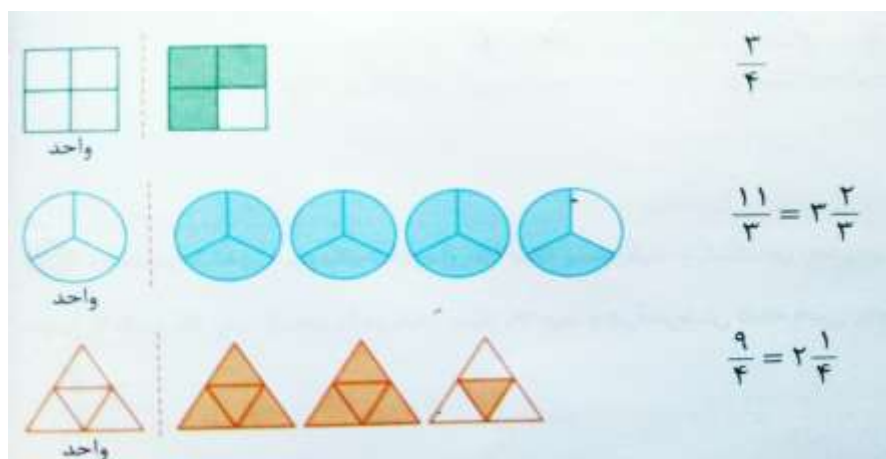
$$\text{ب)} \quad 7\frac{1}{3} - 4\frac{3}{4} =$$

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad 5\frac{3}{4} - 2\frac{2}{3} &= (5-2) + \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right) = 3 + \frac{9}{12} - \frac{8}{12} = 3\frac{1}{12} \\ \text{ب)} \quad 7\frac{1}{3} - 4\frac{3}{4} &= (7-4) + \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{4}\right) = 3 + \frac{1}{3} - \frac{3}{4} = 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{3}{4} = 2 + \frac{4}{3} - \frac{3}{4} = 2 + \frac{16}{12} - \frac{9}{12} = 2\frac{7}{12} \end{aligned}$$

جمع و تفریق کسرهای ۲

یادآوری

با مفهوم کسر در سال های گذشته آشنا شدید و آموختید که هرگاه جزئی از یک واحد مورد نظر باشد، آن را با کسر نشان می دهیم. به مثال های زیر دقت کنید.



نکته: کسری که صورت آن بر مخرجش بخش پذیر باشد، با یک عدد صحیح برابر است.

$$\frac{15}{3} = 5 \text{ و } \frac{24}{4} = 6 \text{ و } \frac{100}{2} = 50 \text{ و } \frac{150}{5} = 30$$

کسره‌های مساوی

اگر صورت و مخرج کسری را در عددی طبیعی ضرب کنیم، کسری مساوی با آن به دست می‌آید. به این ترتیب می‌توانیم بی‌شمار کسر مساوی با یک کسر بنویسیم.

$$\frac{5}{7} = \frac{10}{14} = \frac{15}{21} = \frac{20}{28} = \dots = \frac{45}{63} = \dots$$

جمع و تفریق عددهای کسری

برای انجام جمع و تفریق بین دو یا چند کسر، ابتدا باید آن‌ها را با استفاده از یکی از روش‌های زیر هم‌مخرج کنیم، بعد از هم‌مخرج کردن کسرها، یکی از مخرج‌ها را می‌نویسیم و صورت کسرها را با توجه به علامت بین کسرها، با هم جمع یا از هم کم می‌کنیم. دقت داشته باشید که گاهی اوقات یکی از مخرج‌ها بر دیگری بخش‌پذیر است، در این صورت به سادگی هر دو کسر هم‌مخرج می‌شوند. مانند:

$$\frac{4}{5} - \frac{7}{15} = \frac{4 \times 3}{5 \times 3} - \frac{7}{15} = \frac{12}{15} - \frac{7}{15} = \frac{12-7}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

هم‌مخرج کردن کسرها با استفاده از نوشتن کسره‌های مساوی

در این روش از هم‌مخرج کردن دو کسر، باید کسره‌های مساوی با هر یک از کسرها را بنویسیم، تا جایی که به کسره‌های هم‌مخرج برسیم.

مثال ۱: به مثال‌های زیر توجه کنید.

(الف) $\frac{5}{4} + \frac{1}{6} = \frac{15}{12} + \frac{2}{12} = \frac{15+2}{12} = \frac{17}{12}$

$\frac{5}{4} = \frac{10}{8} = \frac{15}{12}$ $\frac{1}{6} = \frac{2}{12}$

$\frac{5}{4} + \frac{1}{6} = \frac{30}{24} + \frac{4}{24} = \frac{34}{24} = \frac{17}{12}$

$\frac{5}{4} = \frac{30}{24}$ $\frac{1}{6} = \frac{4}{24}$

اگر نوشتن کسرهای مساوی را ادامه دهیم، به کسرهای هم مخرج $\frac{30}{24}$ و $\frac{4}{24}$ می‌رسیم که با جمع این دو کسر و ساده کردن جواب جمع، مجدداً به همان جواب قبلی می‌رسیم.

در مثال بالا، عددهای ۱۲ و ۲۴ مخرج‌های مشترک دو کسر $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{4}$ هستند ولی به عدد ۱۲، کوچک‌ترین مخرج مشترک دو کسر هم گفته می‌شود که استفاده از این عدد باعث ساده‌تر شدن محاسبات می‌گردد.

$$\begin{aligned} \text{ب) } \frac{7}{12} - \frac{5}{18} &= \frac{21}{36} - \frac{10}{36} = \frac{11}{36} \\ \frac{7}{12} &= \frac{14}{24} = \frac{21}{36} \quad \frac{5}{18} = \frac{10}{36} \end{aligned}$$

بنابراین برای انجام جمع و تفریق دو کسر با مخرج‌های نابرابر، بهتر است ابتدا کوچک‌ترین مخرج مشترک دو کسر را بیابیم، سپس جمع یا تفریق را انجام دهیم.

نوشتن مضرب‌های هر یک از مخرج‌ها

در این روش ابتدا مضرب‌های هر یک از مخرج‌ها را می‌نویسیم. اولین مضرب مشترک بین آن‌ها، همان کوچک‌ترین مخرج مشترک کسرهای خواهد شد.

مثال ۲: به مثال‌های زیر دقت کنید.

$$\text{الف) } \frac{5}{9} + \frac{7}{6}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{مضرب‌های ۹: } 9, 18, 27, 36, \dots \\ \text{مضرب‌های ۶: } 6, 12, 18, 24, \dots \end{array} \right\} \Rightarrow \text{عدد ۱۸ کوچک‌ترین مخرج مشترک دو کسر است.}$$

$$\text{محاسبه‌ی جمع: } \frac{5 \times 2}{9 \times 2} + \frac{7 \times 3}{6 \times 3} = \frac{10}{18} + \frac{21}{18} = \frac{31}{18}$$

$$\text{ب) } \frac{2}{15} - \frac{3}{25}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{مضرب های ۱۵: } 15, 30, 45, 60, \underline{75}, \dots \\ \text{مضرب های ۲۵: } 25, 50, \underline{75}, 100, \dots \end{array} \right\} \Rightarrow \text{۷۵ کوچک ترین مخرج مشترک دو کسر است.}$$

$$\text{محاسبه ی تفریق: } \frac{2 \times 5}{15 \times 5} - \frac{3 \times 3}{25 \times 3} = \frac{10}{75} - \frac{9}{75} = \frac{1}{75}$$

جمع و تفریق عددهای مخلوط

برای انجام جمع یا تفریق دو عدد مخلوط، ابتدا قسمت صحیح هر دو عدد را با توجه به علامت بین عددها، با هم جمع، یا از هم کم می کنیم، سپس قسمت های کسری را پس از هم مخرج کردن آن ها، با توجه به علامت بین عددها، با هم جمع، یا از هم کم می کنیم.

مثال ۳: به مثال های زیر دقت کنید.

$$\text{الف) } 2\frac{3}{8} + 3\frac{5}{6} = 5\frac{3 \times 3}{8 \times 3} + \frac{5 \times 4}{6 \times 4} = 5\frac{9}{24} + \frac{20}{24} = 5\frac{29}{24}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{مضرب های ۸: } 8, 16, \underline{24}, 32, \dots \\ \text{مضرب های ۶: } 6, 12, 18, \underline{24}, \dots \end{array} \right\} \Rightarrow \text{۲۴ کوچک ترین مخرج مشترک بین دو کسر است.}$$

$$5\frac{29}{24} = 5 + 1\frac{5}{24} = 6\frac{5}{24}$$

نکته: اگر در جمع اعداد مخلوط، قسمت کسری حاصل جمع، عددی بزرگ تر از واحد شود، باید آن کسر را نیز به عدد مخلوط تبدیل، و با قسمت صحیح قبلی جمع کنیم.

$$\text{ب) } 3\frac{1}{24} - 2\frac{3}{16} = 1\frac{1 \times 2}{24 \times 2} - \frac{3 \times 3}{16 \times 3} = 1\frac{2}{48} - \frac{9}{48} = \frac{50}{48} - \frac{9}{48} = \frac{41}{48}$$

تبدیل به کسر

$24 \text{ های مضرب: } 24, 48, 72, \dots$
 $16 \text{ های مضرب: } 16, 32, 48, \dots$

$\Rightarrow$ 48 کوچک ترین مخرج مشترک دو کسر است.

همان طور که ملاحظه نمودید، گاهی اوقات در تفریق دو عدد مخلوط، بعد از تفریق قسمت صحیح آن ها، قسمت کسری اولین عدد از قسمت کسری دومین عدد کوچک تر می شود و به این ترتیب، تفریق امکان پذیر نمی باشد. در چنین مواقعی یک از روش های تفریق این است که مانند مثال بالا، عدد مخلوط را به کسر تبدیل کنیم، سپس عملیات تفریق را انجام دهیم.

درس دوم - ضرب کسرها

ضرب کسرها

در ضرب دو یا چند کسر، باید صورت ها را در هم ضرب کنیم و در صورت کسر حاصل ضرب قرار دهیم و مخرج ها را نیز در هم ضرب کنیم و در مخرج کسر حاصل ضرب قرار دهیم.

مثال: حاصل ضرب های زیر را حساب کنید.

$$\frac{4}{7} \times \frac{5}{11} =$$

$$\frac{4}{7} \times \frac{5}{11} = \frac{4 \times 5}{7 \times 11} = \frac{20}{77}$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} =$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} = \frac{2 \times 4 \times 6}{3 \times 5 \times 7} = \frac{48}{105}$$

نکته: در ضرب کسرهای، اگر بتوانیم صورت کسرهای را با مخرج آن ها ساده کنیم، بهتر است که ابتدا این کار را انجام دهیم و سپس حاصل ضرب را حساب کنیم. این کار سرعت و دقت محاسبه را افزایش می دهد و نیازی به ساده کردن کسر حاصل نیز نمی باشد.

مثال: حاصل ضرب های زیر را حساب کنید.

Two examples of fraction multiplication with cancellation:

$$\frac{12}{15} \times \frac{25}{18} = \frac{\cancel{12}^2}{\cancel{15}_3} \times \frac{\cancel{25}^5}{\cancel{18}_2} = \frac{2 \times 5}{3 \times 3} = \frac{10}{9} = 1\frac{1}{9}$$

$$\frac{14}{55} \times \frac{22}{35} = \frac{\cancel{14}^2}{\cancel{55}_5} \times \frac{\cancel{22}^2}{\cancel{35}_5} = \frac{2 \times 2}{5 \times 5} = \frac{4}{25}$$

ضرب عددهای مخلوط

برای ضرب اعداد مخلوط از راه محاسبه، ابتدا اعداد مخلوط را به کسر تبدیل می کنیم و سپس کسرهای را در هم ضرب می کنیم و حاصل را به دست می آوریم.

مثال:

Two examples of mixed number multiplication:

$$3\frac{3}{5} \times 2\frac{2}{9} = \frac{18}{5} \times \frac{10}{9} = \frac{180}{45} = 4$$

$$2\frac{3}{4} \times 5\frac{7}{11} = \frac{11}{4} \times \frac{67}{11} = \frac{737}{4} = 18\frac{1}{4}$$

هرگاه حاصل ضرب دو عدد مساوی ۱ باشد، آن دو عدد را «معکوس» یکدیگر می گویند. همه ی عددها به جز صفر، معکوس دارند.

برای مشخص کردن معکوس یک کسر، باید جای صورت و مخرج آن را عوض کنیم.

مثال:

Three examples of finding reciprocals:

$$\frac{5}{9} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{9}{5} \quad \frac{5}{9} \times \frac{9}{5} = 1$$

$$\frac{3}{4} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{4}{3} \quad \frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = 1$$

$$3 = \frac{3}{1} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{1}{3} \quad 3 \times \frac{1}{3} = 1$$

اگر بخواهیم معکوس یک عدد مخلوط را مشخص کنیم، ابتدا باید آن را به شکل کسر در آوریم و سپس کسر را معکوس کنیم.

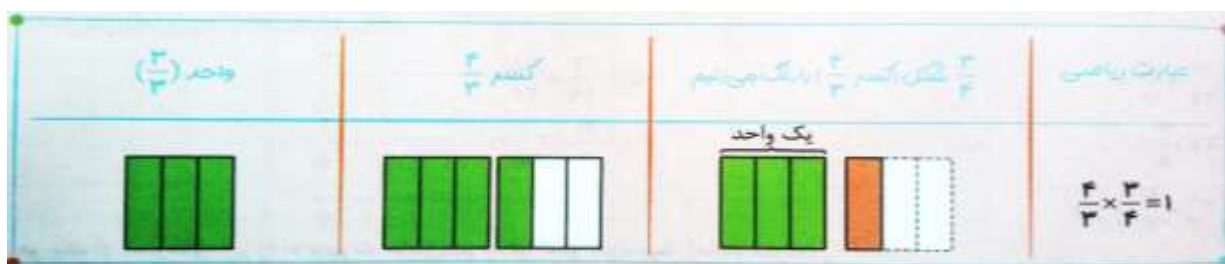
مثال: معکوس عدد $3\frac{1}{4}$ را بنویسید.

پاسخ:

$$3\frac{1}{4} = \frac{13}{4} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{4}{13}$$

مثال: با استفاده از شکل، تساوی های زیر را کامل کنید.

$$\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = ?$$



نصف یک عدد، یعنی آن عدد ضرب در $\frac{1}{2}$.

مثال: نصف $\frac{5}{6}$ یعنی:

$$\frac{5}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{12}$$

$\frac{3}{4}$ از $\frac{2}{3}$ یعنی $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$ که برابر است با: $\frac{1}{2}$

$$\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} = \frac{1}{1}$$

ربع یک عدد یعنی آن عدد ضرب در $\frac{1}{4}$.

$$8 \times \frac{1}{4} = 2$$

مثال: ربع عدد ۸ یعنی:

ضرب کسرها ۲

یادآوری

در سال قبل با سه روش محاسبه ی ضرب کسرها آشنا شدید که عبارت اند از:

۱- رسم شکل

۲- رسم محور

۳- محاسبات ریاضی

با توجه به این که روش محاسباتی، سریع ترین و ساده ترین روش نسبت به دو روش دیگر است، لذا در سال ششم بیش تر از این روش استفاده می کنیم. در این روش برای محاسبه ی حاصل ضرب دو کسر، ابتدا صورت های دو کسر را در همدیگر و مخرج های دو کسر را نیز در همدیگر ضرب می کنیم و به عنوان صورت و مخرج جدید می نویسیم. بهتر است قبل از انجام ضرب، صورت ها را با مخرج ها ساده کنیم. دقت داشته باشید که در ضرب کسرها، نیازی به هم مخرج کردن کسرها نیست.

مثال ۱: به مثال های زیر دقت کنید.

$$\text{الف)} \quad \frac{8}{21} \times \frac{14}{40} = \frac{\overset{1}{\cancel{8}} \times \overset{2}{\cancel{14}}}{\underset{3}{\cancel{21}} \times \underset{5}{\cancel{40}}} = \frac{2}{15}$$

عددهای ۸ و ۴۰ را به ۸ ساده کردیم و عددهای ۱۴ و ۲۱ را نیز به ۷ ساده کردیم و در آخر ساده شده ی عددها را در یک دیگر ضرب کردیم.

$$\text{ب)} \quad \frac{27}{36} \times \frac{28}{21} = \frac{\overset{3}{\cancel{27}} \times \overset{4}{\cancel{28}}}{\underset{4}{\cancel{36}} \times \underset{3}{\cancel{21}}} = \frac{1}{1} = 1$$

در ابتدا عددهای ۲۷ و ۳۶ را به ۹ و عددهای ۲۸ و ۲۱ را نیز به ۷ ساده می کنیم و این عمل را مجدداً برای ساده شده ی عددها تکرار می کنیم.

$$\text{ج) } \frac{26}{39} \times \frac{28}{32} = \frac{\cancel{2}^1 \cancel{13}^1 \times \cancel{2}^1 \cancel{14}^1}{\cancel{3}^1 \cancel{13}^1 \times \cancel{8}^1 \cancel{4}^1} = \frac{7}{12}$$

ابتدا عددهای ۲۶ و ۳۹ را به ۱۳ و عددهای ۲۸ و ۳۲ را به ۴ ساده می کنیم و این عمل را برای ساده شده ی عددها تکرار می کنیم.

$$\text{د) } \frac{15}{16} \times \frac{18}{25} \times \frac{20}{12} = \frac{\cancel{15}^3 \times \cancel{18}^3 \times \cancel{20}^5}{\cancel{16}^4 \times \cancel{25}^5 \times \cancel{12}^3} = \frac{9}{8}$$

ضرب عددهای مخلوط

برای انجام ضرب عددهای مخلوط، ابتدا باید آن ها را به عدد کسری تبدیل، سپس مثل ضرب کسرها عمل کنیم.
مثال ۲: به مثال های زیر دقت کنید.

$$\text{الف) } 3\frac{3}{7} \times 2\frac{5}{8} = \frac{24}{7} \times \frac{21}{8} = \frac{\cancel{24}^3 \times \cancel{21}^3}{\cancel{7}^1 \times \cancel{8}^1} = \frac{9}{1} = 9 \quad \text{ب) } 2\frac{1}{6} \times 1\frac{2}{13} = \frac{13}{6} \times \frac{15}{13} = \frac{\cancel{13}^1 \times \cancel{15}^1}{\cancel{6}^1 \times \cancel{13}^1} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$$

معکوس یک کسر

اگر جای صورت و مخرج یک کسر را تغییر دهیم، معکوس آن کسر به دست می آید.

$$\frac{3}{5} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{5}{3} \quad \frac{7}{2} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{2}{7} \quad \frac{4}{3} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{3}{4} \quad 5 = \frac{5}{1} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{1}{5}$$

نکته:

۱- همه ی اعداد به غیر از صفر، معکوس دارند.

۲- برای تعیین معکوس یک عدد مخلوط، ابتدا باید آن عدد را به کسر تبدیل، و سپس معکوس کنیم.

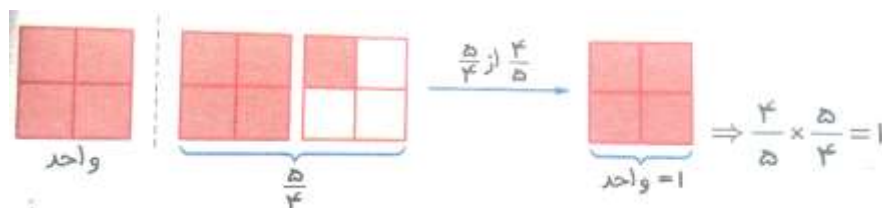
$$2\frac{1}{3} = \frac{7}{3} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{3}{7} \quad 5\frac{3}{8} = \frac{43}{8} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{8}{43}$$

۳- هرگاه حاصل ضرب دو عدد برابر یک شود، آن دو عدد معکوس یک دیگر هستند. به عبارت دیگر، حاصل ضرب هر عددی در معکوسش، همیشه مساوی یک می شود.

$$\frac{3}{5} \times \frac{5}{3} = 1 \qquad 2\frac{1}{3} \times \frac{3}{7} = \frac{7}{3} \times \frac{3}{7} = 1 \qquad 5 \times \frac{1}{5} = 1$$

مثال ۳: با رسم شکل نشان دهید که $\frac{5}{4}$ و $\frac{4}{5}$ ، معکوس یک دیگر هستند.

کافی است که نشان دهیم حاصل ضرب این دو کسر، برابر یک است. در ابتدا شکل $\frac{5}{4}$ را رسم می کنیم، حالا برای مشخص کردن $\frac{4}{5}$ از $\frac{5}{4}$ ، باید ۴ خانه ی رنگ شده از شکل $\frac{5}{4}$ را انتخاب کنیم. به این ترتیب ملاحظه می کنید که حاصل برابر یک واحد شد، چون $\frac{4}{5}$ از $\frac{5}{4}$ شکل، مساوی واحد شد، پس ضرب این دو کسر (یعنی $\frac{4}{5} \times \frac{5}{4}$) مساوی یک است. لذا طبق نکته ی بالا، این دو کسر معکوس یک دیگر هستند.



نکته: معکوس معکوس هر عددی برابر خود آن عدد است.

$$\frac{3}{5} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{5}{3} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{3}{5}$$

پیدا کردن مقدار نامعلوم در تساوی ها

مثال ۴: در تساوی $\frac{3}{5} = \frac{15}{?}$ ، به جای علامت سؤال چه عددی باید نوشت؟

همان طور که ملاحظه می کنید، عدد ۳، پنج برابر شده است، پس باید ۵ هم، پنج برابر شود.

به عبارت دیگر، اول ۱۵ را بر ۳ تقسیم می کنیم تا بفهمیم که ۳ چند برابر شده است و سپس ۵ را هم در همان عدد ضرب می کنیم، برای حل این گونه سؤالات به روش زیر عمل می کنیم:

$$\frac{3}{5} = \frac{15}{\square} \rightarrow \square = 5 \times \frac{15}{3} = \frac{5 \times 15}{\cancel{3}} = 25$$

$$\frac{\triangle}{\square} = \frac{?}{\bigcirc}$$

، برای پیدا کردن مقدار ؟ از رابطه ی زیر استفاده

نکته: به طور کلی در تساوی دو کسر مانند می کنیم.

$$? = \frac{\triangle \times \bigcirc}{\square}$$

مثال ۵: در هر قسمت مقدار ؟ را پیدا کنید.

$$\text{الف) } \frac{15}{45} = \frac{\square}{18} \Rightarrow \square = \frac{15^2 \times 18}{45} = \frac{9}{1} = 9$$

$$\text{ب) } \frac{\square}{20} = \frac{11}{35} \Rightarrow \square = \frac{11^2 \times 20}{35} = \frac{12}{1} = 12$$

حل چند مسئله

مثال ۶: در زنگ ورزش یک کلاس ۳۰ نفری، $\frac{2}{5}$ از دانش آموزان فوتبال، $\frac{1}{3}$ والیبال و بقیه ی آن ها تنیس روی میز بازی می کنند. چند نفر فوتبال بازی می کنند؟

$$\frac{2}{5} \times 30 = \frac{2 \times 30}{5} = 12$$

۱۲ نفر فوتبال بازی می کنند.

چند نفر والیبال بازی می کنند؟

$$\frac{1}{3} \times 30 = \frac{1 \times 30}{3} = 10$$

۱۰ نفر والیبال بازی می کنند.

چند نفر تنیس روی میز بازی می کنند؟

$$30 - (10 + 12) = 30 - 22 = 8$$

۸ نفر تنیس روی میز بازی می کنند.

مثال ۷: کشاورزی $\frac{1}{3}$ از مزرعه ی خود را هندوانه و $\frac{2}{5}$ از باقی مانده ی مزرعه را خربزه و در بقیه ی زمین گوجه فرنگی کاشته است. اگر کل مزرعه ی او ۴ هکتار باشد:

الف) در چند متر مربع هندوانه کاشته است؟

$$\text{متر مربع} \quad 40000 \times \frac{1}{3} = 13333 \frac{1}{3}$$

مساحت زیر کشت هندوانه $\Rightarrow$ متر مربع $40000 - 13333 \frac{1}{3} = 26666 \frac{2}{3}$ هکتار ۴

ب) در چند متر مربع خربزه کاشته است؟

$$\text{متر مربع} \quad 26666 \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} = 10666 \frac{4}{15}$$

مساحت زیر کشت خربزه $\Rightarrow$ غیر از هندوانه کاشته $26666 \frac{2}{3} - 10666 \frac{4}{15} = 16000$ هکتار ۴

ج) در چند متر مربع گوجه فرنگی کاشته است؟

$$\text{مساحت زیر کشت گوجه فرنگی} = \begin{cases} 16000 - 10666 \frac{4}{15} = 5333 \frac{4}{15} \\ \text{یا} \\ 40000 - (10666 \frac{4}{15} + 13333 \frac{1}{3}) = 40000 - 24000 = 16000 \end{cases}$$

درس سوم - تقسیم کسرها

تقسیم کسرها

مثال:

$$\frac{4}{5} \div \frac{2}{7} = \frac{4}{5} \times \frac{7}{2} = \frac{14}{5} = 2 \frac{4}{5}$$

برای محاسبه ی تقسیم کسرها از راه محاسبه یک روش کلی وجود دارد، به این ترتیب که کسر اول را می نویسیم، عمل تقسیم را به ضرب تبدیل می کنیم و کسر دوم را معکوس می کنیم (یعنی جای صورت و مخرج را عوض می کنیم) و سپس مانند ضرب کسرها، حاصل را به دست می آوریم.

مثال:

$$\frac{14}{15} \div \frac{7}{3} = \frac{14 \div 7}{15 \div 3} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{16}{11} \div \frac{2}{11} = \frac{16 \div 2}{11 \div 11} = \frac{8}{1} = 8$$

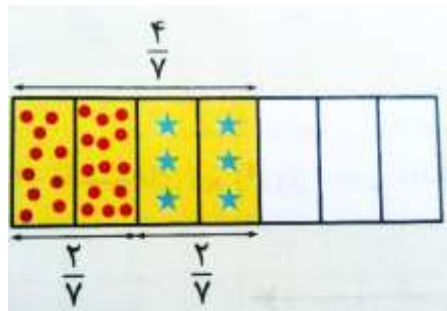
نکته: اگر در تقسیم کسرها، صورت کسر سمت چپ بر صورت کسر سمت راست بخش پذیر باشد و مخرج کسر سمت چپ بر مخرج کسر سمت راست بخش پذیر باشد، می توانیم آن ها را بر هم تقسیم کنیم و به سادگی جواب را به دست آوریم.

تقسیم کسرها به کمک شکل

می خواهیم حاصل $\frac{4}{7} \div \frac{2}{7}$ را به کمک شکل محاسبه کنیم.

ابتدا یک مستطیل را به عنوان واحد رسم می کنیم و آن را به ۷ قسمت مساوی تقسیم می کنیم ابتدا یک مستطیل را به عنوان واحد رسم می کنیم و ۴ قسمت آن را رنگ می کنیم. اکنون هر دو قسمت آن را با رنگ های متفاوت

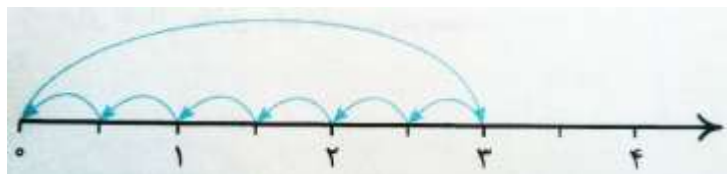
مشخص می کنیم. دو تا $\frac{2}{7}$ روی شکل مشخص می شود، پس حاصل می شود ۲؛ یعنی $\frac{4}{7} \div \frac{2}{7} = 2$



تقسیم کسرها به کمک محور اعداد

می خواهیم حاصل $\frac{1}{4} \div 3$ را به کمک محور حساب کنیم. ابتدا محور را رسم می کنیم و ۳ واحد را روی آن مشخص می کنیم. چون مخرج کسر ۲ است، هر واحد را به ۲ قسمت تقسیم می کنیم. اکنون باید ببینیم که در ۳ واحد، چقدرتا $\frac{1}{4}$ هست.

همان طور که روی محور می بینیم در ۳ واحد، ۶ تا $\frac{1}{4}$ داریم، پس $3 \div \frac{1}{4} = 6$.



مثال: برای تقسیم اعداد مخلوط، ابتدا باید آن ها را به کسر تبدیل کنیم و سپس عمل تقسیم را انجام دهیم.

مثال: حاصل عبارت $2\frac{2}{3} \div 3\frac{1}{5}$ را حساب کنید.

پاسخ:

$$3\frac{1}{5} \div 2\frac{2}{3} = \frac{16}{5} \div \frac{8}{3} = \frac{16}{5} \times \frac{3}{8} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$$

تقسیم کسره های ۲

یادآوری

اگر بخواهیم چهار کلوچه را بین سه نفر تقسیم کنیم، می توانیم در ابتدا هر کلوچه را به سه قسمت تقسیم کنیم و سپس به هر نفر ۴ تا $\frac{1}{3}$ کلوچه بدهیم؛ به این ترتیب سهم هر نفر $\frac{4}{3}$ کلوچه می شود.

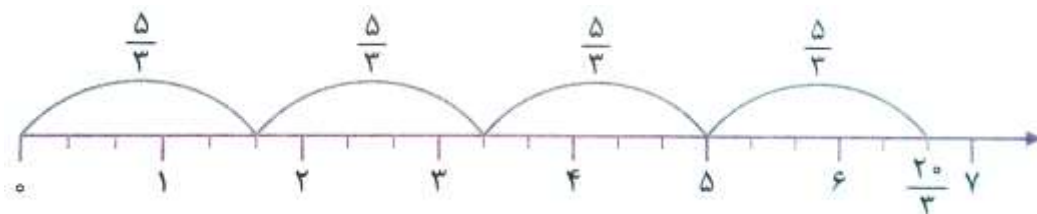


به عبارت دیگر:

$$4 \div 3 = 4 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

با توجه به عبارت بالا، برای تقسیم دو عدد صحیح برهم، کافی است که اولین عدد را در معکوس دومین عدد ضرب کنیم، سپس حاصل ضرب را به دست آوریم.
مثال ۱: حاصل هر یک از تقسیم های زیر را به دست آورید.

$$\text{الف) } 7 \div 4 = 7 \times \frac{1}{4} = \frac{7}{4} \quad \text{ب) } 20 \div 9 = 20 \times \frac{1}{9} = \frac{20}{9} \quad \text{ج) } 35 \div 8 = 35 \times \frac{1}{8} = \frac{35}{8}$$



در محور بالا، در $\frac{20}{3}$ چهار تا $\frac{5}{3}$ قرار دارد. به عبارت دیگر:

$$\frac{20}{3} \div \frac{5}{3} = \frac{20}{5} = 4$$

با توجه به عبارت بالا، برای تقسیم دو کسر با مخرج های برابر، کافی است که صورت اولین کسر را بر صورت دومین کسر تقسیم کنیم.

نکته: برای تقسیم دو عدد مخلوط بر یک دیگر، ابتدا آن ها را به صورت کسری می نویسیم، سپس حاصل تقسیم را به دست می آوریم.

مثال ۲: حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$\text{الف) } \frac{20}{7} \div \frac{2}{7} = \frac{20}{2} = 10 \quad \text{ب) } 3\frac{3}{7} \div 2\frac{4}{7} = \frac{24}{7} \div \frac{18}{7} = \frac{24}{18} = \frac{4}{3} \quad \text{ج) } \frac{8}{9} \div 1\frac{1}{9} = \frac{8}{9} \div \frac{10}{9} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

اگر دو کسر هم مخرج باشند، حاصل تقسیم آن ها به سادگی قابل محاسبه است؛ پس از این خاصیت می توانیم برای تقسیم کسرهایی که مخرج آن ها برابر نمی باشد هم استفاده کنیم، به این ترتیب که ابتدا دو کسر را هم مخرج کنیم و سپس به روش بالا عمل کنیم.

مثال ۳: حاصل تقسیم های زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{9}{14} \div \frac{1}{2} = \frac{9}{14} \div \frac{1 \times 7}{2 \times 7} = \frac{9}{14} \div \frac{7}{14} = \frac{9}{7}$

ب) $\frac{20}{9} \div \frac{5}{6} = \frac{20 \times 2}{9 \times 2} \div \frac{5 \times 3}{6 \times 3} = \frac{40}{18} \div \frac{15}{18} = \frac{40}{15} = \frac{8}{3}$

مضرب های ۹: ۹, ۱۸, ۲۷, ۳۶, ...

مضرب های ۶: ۶, ۱۲, ۱۸, ۲۴, ۳۰, ...

ج) $2\frac{1}{7} \div 3\frac{1}{2} = \frac{15}{7} \div \frac{7}{2} = \frac{30}{14} \div \frac{49}{14} = \frac{30}{49}$

روش کلی محاسبه ی حاصل تقسیم دو عدد

کافی است که اولین عدد را در معکوس دومین عدد ضرب کنیم و حاصل ضرب را پس از ساده کردن صورت ها با مخرج ها، به دست آوریم.

مثال ۴: به مثال های زیر دقت کنید.

الف) $\frac{9}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{9}{4} \times \frac{2}{1} = \frac{9 \times 2}{4 \times 1} = \frac{9}{2}$ (معکوس)

ب) $\frac{20}{9} \div \frac{5}{6} = \frac{20}{9} \times \frac{6}{5} = \frac{20 \times 6}{9 \times 5} = \frac{8}{3}$

ج) $2\frac{1}{7} \div 3\frac{1}{2} = \frac{15}{7} \div \frac{7}{2} = \frac{15}{7} \times \frac{2}{7} = \frac{30}{49}$

مثال ۵: حاصل عبارت $(2\frac{1}{8} - 1\frac{5}{6}) \div 2\frac{5}{12}$ را به دست آورید.

ابتدا حاصل عبارت داخل پرانتز را به دست می آوریم، سپس جواب آن را بر عدد مخلوط تقسیم می کنیم.

عبارت داخل پرانتز: $2\frac{1}{8} - 1\frac{5}{6} = 1\frac{3}{8} - \frac{5 \times 4}{6 \times 4} = 1\frac{3}{8} - \frac{20}{24} = \frac{27}{24} - \frac{20}{24} = \frac{7}{24}$

$(2\frac{1}{8} - 1\frac{5}{6}) \div 2\frac{5}{12} = \frac{7}{24} \div \frac{29}{12} = \frac{7}{24} \times \frac{12}{29} = \frac{7}{58}$

مثال ۶: پدر یک خانواده ی پنج نفره دو عدد نان سنگک خرید. او و همسرش $\frac{1}{3}$ نان ها را خوردند و بقیه ی نان ها را بین سه فرزند خود به طور مساوی تقسیم کردند. سهم هر یک از فرزندان چه کسری از یک نان است؟

$$\text{سهم هر فرزند} = \frac{2}{3} \div 3 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

برای فرزندان باقی مانده است $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

مثال ۷: $\frac{3}{5}$ گنجایش ظرفی ۷۵ لیتر است. گنجایش باقی مانده ی ظرف چه قدر است؟

$$\text{گنجایش باقی مانده ی ظرف} = 125 - 75 = 50 \Rightarrow \text{گنجایش کل ظرف} = 125$$

$$75 \div \frac{3}{5} = \frac{75}{1} \times \frac{5}{3} = 125$$

درس چهارم: محاسبات با کسر

برای محاسبه ی حاصل کسرهایی که صورت و مخرج آن ها دارای عملیات ریاضی است، مانند مثال زیر عمل می کنیم:

مثال: حاصل عبارت مقابل را حساب کنید.

$$\frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} =$$

پاسخ:

$$\frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{8}{12} - \frac{3}{12}}{\frac{3}{6} + \frac{2}{6}} = \frac{\frac{5}{12}}{\frac{5}{6}} = \frac{5}{12} \div \frac{5}{6} = \frac{1}{2}$$

مثال: حاصل $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}$ را به سه روش حساب کنید.

۱- با مخرج مشترک گرفتن

۲- با محور

۳- با رسم شکل

پاسخ:

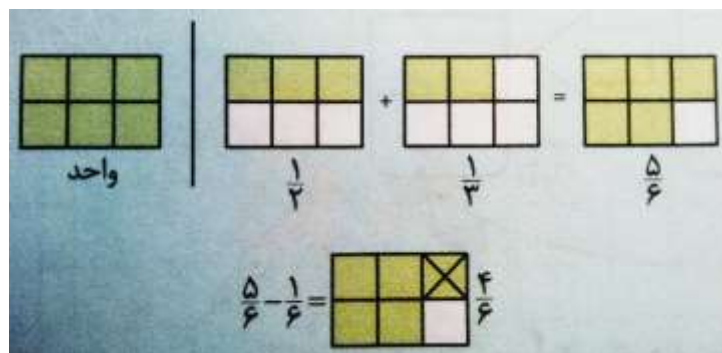
۱- با مخرج مشترک گرفتن

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$$

۲- با محور



۳- با رسم شکل: (می دانیم: $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ و $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$)



گاهی اوقات مسئله های مربوط به کسرها، با رسم شکل ساده تر حل می شوند. به مثال زیر دقت کنید:

پاسخ:

حافظه ی پاک شده ی روز اول	حافظه ی پاک شده ی روز دوم	حافظه ی پاک شده ی روز سوم	حافظه ی پاک شده ی روز سوم
حافظه ی پاک شده ی روز اول	حافظه ی پاک شده ی روز دوم	حافظه ی پاک شده ی روز سوم	حافظه ی پاک نشده ی روز سوم

مثال: یک ویروس رایانه، حافظه ی رایانه ای را پاک می کند. این ویروس روز اول $\frac{1}{4}$ حافظه و روز دوم $\frac{1}{3}$ حافظه ی باقی مانده از روز اول و روز سوم $\frac{3}{4}$ باقی مانده از روزهای قبل را پاک می کند. حساب کنید پس از ۳ روز هنوز چه کسری از حافظه پاک نشده است؟

هنوز $\frac{1}{8}$ حافظه پاک نشده است.

محاسبات با کسر ۲

در انجام عملیات ریاضی باید به ترتیب و اولویت عملیات داده شده دقت کنیم. به طور کلی در یک عبارت محاسباتی، باید به ترتیب زیر عمل کنیم:

- ۱- محاسبه ی پرانتز ها از داخلی ترین آن ها
- ۲- انجام ضرب یا تقسیم، هر کدام که از چپ به راست عبارت، زودتر دیده شد.
- ۳- انجام جمع یا تفریق، هر کدام که از چپ به راست عبارت، زودتر دیده شد.

مثال ۱: به مثال های زیر دقت کنید.

$$\text{الف) } \left(3\frac{3}{5} - 2\frac{11}{15} \right) \div 1\frac{3}{10} =$$

در ابتدا، حاصل عبارت داخل پرانتز را حساب کرده و عدد به دست آمده را بر $1\frac{3}{10}$ تقسیم می کنیم.

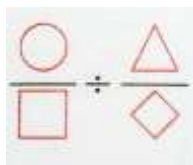
$$\text{محاسبه ی داخل پرانتز: } 3\frac{3}{5} - 2\frac{11}{15} = 1\frac{3 \times 3}{5 \times 3} - \frac{11}{15} = 1\frac{9}{15} - \frac{11}{15} = \frac{24}{15} - \frac{11}{15} = \frac{13}{15}$$

$$\text{محاسبه ی کل عبارت: } \left(3\frac{3}{5} - 2\frac{11}{15} \right) \div 1\frac{3}{10} = \frac{13}{15} \div \frac{13}{10} = \frac{13}{15} \times \frac{10}{13} = \frac{2}{3}$$

$$\text{ب) } \frac{9}{11} - \frac{9}{11} \div \frac{15}{22} =$$

در این عبارت، در ابتدا باید حاصل تقسیم $\frac{9}{11}$ بر $\frac{15}{22}$ را به دست آوریم. دقت داشته باشید که در هر عبارت محاسباتی، باید حاصل ضرب و تقسیم را زودتر از جمع و تفریق به دست آوریم.

$$\text{محاسبه ی کل عبارت: } \frac{9}{11} - \frac{9}{11} \div \frac{15}{22} = \frac{9 \times 22}{11 \times 22} - \frac{2 \times 11}{3 \times 11} = \frac{27}{22} - \frac{22}{22} = \frac{5}{22}$$



را به

کافی است حاصل تقسیم



نکته: برای محاسبه ی عبارت هایی مانند دست آوریم.

$$\text{ج) } \frac{\frac{9}{20}}{\frac{3}{25}} = \frac{9}{20} \div \frac{3}{25} = \frac{9}{20} \times \frac{25}{3} = \frac{15}{4}$$

برای حل چنین سؤالاتی، ابتدا باید عبارت های موجود در صورت و مخرج کسر را به طور جداگانه محاسبه کنیم، سپس با استفاده از نکته ی قبل، حاصل کل عبارت را به دست آوریم.

$$\text{د) } \frac{\frac{1}{7} + \frac{3}{14}}{\frac{13}{14} - \frac{5}{7}} =$$

$$\begin{aligned} \text{محاسبه ی کل عبارت: } \frac{\frac{1 \times 2}{7 \times 2} + \frac{3}{14}}{\frac{13}{14} - \frac{5 \times 2}{7 \times 2}} &= \frac{\frac{2}{14} + \frac{3}{14}}{\frac{13}{14} - \frac{10}{14}} = \frac{\frac{5}{14}}{\frac{3}{14}} = \frac{5}{14} \div \frac{3}{14} = \frac{5}{14} \times \frac{14}{3} = \frac{5}{3} \\ \text{ه) } \frac{\frac{5}{12} - \frac{3}{15}}{\frac{4}{15} - \frac{3}{20}} &= \frac{\frac{5 \times 5}{12 \times 5} - \frac{14 \times 4}{15 \times 4}}{\frac{2 \times 4}{15 \times 4} - \frac{3 \times 3}{20 \times 3}} = \frac{\frac{25}{60} - \frac{56}{60}}{\frac{8}{60} - \frac{9}{60}} = \frac{\frac{125}{60} - \frac{56}{60}}{\frac{48}{60} - \frac{9}{60}} = \frac{\frac{69}{60}}{\frac{59}{60}} = \frac{69}{60} \div \frac{59}{60} = \frac{69}{59} = 1 \frac{10}{59} \end{aligned}$$

مقایسه ی کسرها

در مقایسه ی کسرها، سه حالت زیر اتفاق می افتد:

حالت اول: در کسرهایی که مخرج آن ها مساوی است، کسری بزرگ تر است که صورت آن بزرگ تر باشد.

$$\frac{3}{7} < \frac{5}{7} \qquad \frac{12}{13} > \frac{9}{13}$$

حالت دوم: در کسرهایی که صورت آن ها مساوی است، کسری بزرگ تر است که مخرج آن کوچک تر باشد.

$$\frac{3}{5} < \frac{3}{2} \qquad \frac{15}{7} > \frac{15}{20}$$

حالت سوم: برای مقایسه ی کسرهایی که نه صورت و نه مخرج های برابر دارند، ابتدا هر دو کسر را هم مخرج یا هم صورت می کنیم، سپس کسرها را مانند حالت اول یا دوم مقایسه می کنیم.

مثال ۲:

$$\begin{array}{l} \text{الف) } \frac{25}{18} \bigcirc \frac{17}{12} \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{25 \times 2}{18 \times 2} \bigcirc \frac{17 \times 3}{12 \times 3} \rightarrow \frac{50}{36} < \frac{51}{36} \\ \text{مضرب های ۱۸: } ۱۸, ۳۶, ۵۴, \dots \qquad \text{مضرب های ۱۲: } ۱۲, ۲۴, ۳۶, ۴۸, \dots \\ \text{ب) } \frac{6}{17} \bigcirc \frac{4}{13} \xrightarrow{\text{صورت مشترک}} \frac{6 \times 2}{17 \times 2} \bigcirc \frac{4 \times 3}{13 \times 3} \rightarrow \frac{12}{34} > \frac{12}{39} \end{array}$$

در این مثال، صورت مشترک گیری ساده تر از مخرج مشترک گیری است، لذا با نوشتن مضرب های ۶ و ۴، کوچک ترین مضرب مشترک آن ها را تعیین می کنیم و بین دو کسر، صورت مشترک می گیریم.

نکته: در مقایسه ی عددهای مخلوط، ابتدا قسمت های صحیح، سپس قسمت های کسری که کوچک تر از واحد هستند را با هم مقایسه می کنیم.

$$۳\frac{4}{5} > ۳\frac{3}{5} \qquad ۲\frac{7}{10} < ۳\frac{1}{10} \qquad ۷\frac{3}{8} < ۷\frac{3}{4}$$

گاهی برای مقایسه ی بعضی از کسرها مانند $\frac{5}{12}$ و $\frac{7}{13}$ بهتر است هر کسر را با نصف واحد کامل همان کسر مقایسه کنیم.

در کسر $\frac{5}{12}$ ، واحد کامل همان $\frac{12}{12}$ است که نصف آن $\frac{6}{12}$ می شود. عدد $\frac{5}{12}$ از نصف واحد کامل (یعنی $\frac{6}{12}$) کوچک تر است. در کسر $\frac{7}{13}$ ، واحد کامل همان $\frac{13}{13}$ است که نصف آن $\frac{6.5}{13}$ می شود. عدد $\frac{7}{13}$ از نصف واحد کامل (یعنی $\frac{6.5}{13}$) بزرگ تر است. چون $\frac{7}{13}$ از نصف واحد کامل، بزرگ تر و $\frac{5}{12}$ از نصف واحد کامل، کوچک تر است، پس:

$$\frac{7}{13} > \frac{5}{12}$$

مثال ۳: اعداد زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$$\frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, 1, \frac{11}{6}, \frac{7}{2}, \frac{4}{7}$$

برای حل چنین سؤالاتی بهتر است در ابتدا عددهای کوچک تر از واحد را جداگانه و عددهای بزرگ تر از واحد را نیز جداگانه مقایسه کنیم.

اعددهای کوچک تر از واحد: $\frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{4}{7}$ مخرج مشترک $\rightarrow \frac{3 \times 21}{5 \times 21}, \frac{2 \times 35}{3 \times 35}, \frac{4 \times 15}{7 \times 15} \rightarrow \frac{63}{105}, \frac{70}{105}, \frac{60}{105}$
 $\frac{60}{105} < \frac{63}{105} < \frac{70}{105} \Rightarrow \frac{4}{7} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3}$

اعددهای بزرگ تر از واحد: $1, \frac{11}{6}, \frac{7}{2}, \frac{5}{4}$ مخرج مشترک $\rightarrow \frac{10 \times 4}{4 \times 4}, \frac{5 \times 3}{4 \times 3}, \frac{11 \times 2}{6 \times 2}, \frac{7 \times 6}{2 \times 6}$
 $\rightarrow \frac{40}{12}, \frac{15}{12}, \frac{22}{12}, \frac{42}{12} \rightarrow \frac{15}{12} < \frac{22}{12} < \frac{40}{12} < \frac{42}{12} \rightarrow \frac{5}{4} < \frac{11}{6} < 1 < \frac{7}{2}$

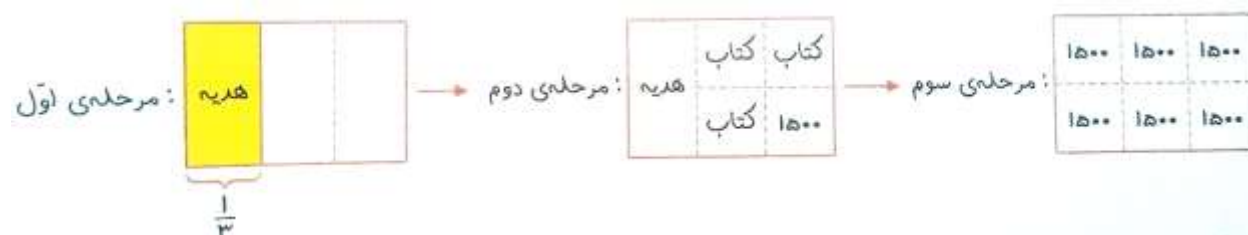
بنابراین عددها به ترتیب مقابل هستند.

$$\frac{4}{7} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3} < 1 < \frac{5}{4} < \frac{11}{6} < \frac{7}{2}$$

مثال ۴: ایلیا با $\frac{1}{3}$ پول خود یک هدیه برای دوستش و با $\frac{2}{3}$ باقی مانده ی پولش یک کتاب داستان برای خودش خرید. اگر پس از خرید کتاب و هدیه، ۱۵۰۰ تومان برایش باقی مانده باشد، پول ایلیا چه قدر بوده است؟
روش اول:

$$\begin{aligned} \text{باقی مانده ی پول ایلیا پس از خرید هدیه} \quad 1 - \frac{1}{3} &= \frac{3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\ \text{کسری از پولش که برای خرید کتاب هزینه کرد} \quad \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} &= \frac{1}{2} \\ \text{کسری از پول که خرج شد} \quad \frac{3}{3} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) &= \frac{3}{3} - \left(\frac{2}{6} + \frac{3}{6}\right) = \frac{3}{3} - \frac{5}{6} = \frac{6}{6} - \frac{5}{6} = \frac{1}{6} \\ \text{پول ایلیا در ابتدا ۹۰۰۰ تومان بوده است.} \quad 1500 \div \frac{1}{6} &= 1500 \times \frac{6}{1} = 9000 \end{aligned}$$

روش دوم: برای حل این گونه سؤالات بهتر است از روش رسم شکل استفاده کنیم. برای درک بهتر این روش مراحل رسم شکل را به طور جداگانه انجام می دهیم.



کل شکل به ۶ قسمت مساوی تقسیم شد؛ در نتیجه کل پول ایلیا در ابتدا $9000 = 6 \times 1500$ تومان بوده است.

مریم عزیزی

فصل سوم - اعداد اعشاری

یادآوری

به کسرهایی که مخرج آن ها ۱۰ یا ۱۰۰ یا ۱۰۰۰ و ... باشند کسرهایی اعشاری می گویند، کسرهایی اعشاری را می توان به صورت عدد اعشاری نوشت.

مثال: کسر اعشاری $\frac{273}{100}$ را به صورت عدد اعشاری بنویسید.

پاسخ: $\frac{273}{100} = 2.73$

هر عدد اعشاری از دو جزء یا دو قسمت تشکیل شده است: جزء صحیح یا قسمت صحیح عدد و جزء اعشاری یا قسمت اعشاری عدد.

برای مثال در عدد 2.73 داریم:

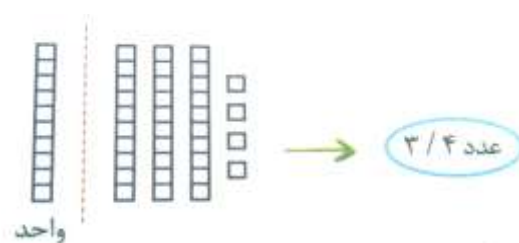


اگر این عدد را در جدول ارزش مکانی قرار دهیم، به صورت زیر است:

خط ممیز. قسمت صحیح عدد			قسمت اعشاری عدد				
صدگان	دهگان	یکان	دهم	صدم	هزارم	ده هزارم	صد هزارم
		۲	۷	۳			

مثال: عدد $3/4$ را به وسیله ی شکل نمایش دهید.

پاسخ: در این عدد، واحد به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم شده، یعنی $\frac{10}{10} = 1$ واحد.



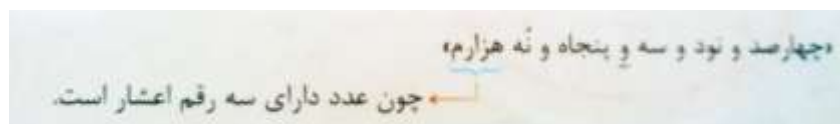
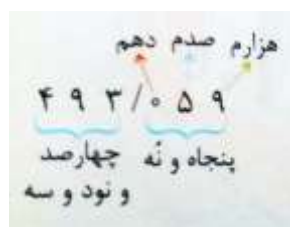
$$3/4 = 3 + 0/4 = 3 + 0/1 + 0/1 + 0/1 + 0/1$$

نوشتن عددهای اعشاری از رقم به حروف

برای خواندن عددهای اعشاری، ابتدا قسمت صحیح عدد را مانند عددهای طبیعی معمولی می خوانیم، سپس قسمت اعشاری را نیز مانند عدد صحیح می خوانیم اما با توجه به تعداد رقم های اعشار آن در انتهای عبارت کلمه ی دهم یا صدم یا هزارم و ... را قرار می دهیم. برای مثال اگر عدد دارای دو رقم اعشار باشد، پس از خواندن قسمت اعشاری کلمه ی صدم و اگر عدد دارای سه رقم اعشاری باشد، پس از خواندن قسمت اعشاری کلمه ی هزارم را به کار می بریم.

مثال: عدد $493/059$ را بخوانید. (به حروف بنویسید).

پاسخ:



نکته: به روش خواندن این دو عدد دقت کنید.



اگر عدد قسمت ب را خواهیم به روش گفته شده بخوانیم، ممکن است دچار اشتباه شویم و هر یک از عددهای قسمت الف یا ب را بنویسیم. برای جلوگیری از این اشتباه، اگر در این گونه موارد، عدد صحیح صفر نبود، بعد از خواندن عدد قسمت صحیح، عبارت «عدد صحیح» را می نویسیم.

مثال:



نوشتن اعداد اعشاری از حروف به رقم

در این حالت بهتر است از جدول ارزش مکانی استفاده کنیم و هر رقم را در مرتبه ی خودش قرار دهیم.

مثال: عدد صد و سی و چهار و هفتاد و شش صدم را به رقم بنویسید.

پاسخ:

خط ممیز

هزارم	صدم	دهم	یکان	دهگان	صدگان
	۶	۷	۴	۳	۱

→ ۱۳۴ / ۷۶

نوشتن عددهای اعشاری به صورت کسر

ابتدا کل رقم های عدد را بدون ممیز در صورت کسر قرار می دهیم و سپس در مخرج کسر، عدد ۱ را قرار می دهیم و در سمت راست عدد ۱ به تعداد رقم های اعشار، صفر قرار می دهیم.

مثال عدد ۵۲ / ۱۹۵ به این صورت می شود:

$$\frac{52195}{1000}$$

سه رقم اعشار سه تا صفر

نوشتن کسرها به صورت عددهای اعشاری

الف: اگر مخرج کسر ۱۰ یا ۱۰۰ یا ۱۰۰۰ یا ... باشد، ابتدا عدد صورت کسر را می نویسیم و سپس به تعداد صفرهای مخرج از سمت راست، ممیز می زنیم.

مثال: عدد $\frac{4273}{1000}$ را به صورت اعشاری بنویسید.

پاسخ:

$$\frac{4273}{1000} = 4 / 273$$

سه رقم اعشار سه تا صفر

ب: اگر مخرج کسر ۱۰ یا ۱۰۰ یا ۱۰۰۰ یا ... نبود، برای تبدیل کسر به عدد اعشاری، ابتدا باید با ضرب صورت و مخرج در عدد مناسب، مخرج کسر را به ۱۰ یا ۱۰۰ یا ۱۰۰۰ و تبدیل کنیم و سپس کسر اعشاری را به صورت عدد اعشاری بنویسیم. برای راحتی کار بهتر است که ضرب های مقابل را به خاطر بسپارید.

$$2 \times 5 = 10$$

$$4 \times 25 = 100$$

$$8 \times 125 = 1000$$

مثال: کسرهایی زیر را به عدد اعشاری تبدیل کنید.

$\frac{3}{5} \rightarrow \frac{3 \times 2}{5 \times 2} = \frac{6}{10} = 0.6$
 $\frac{43}{25} \rightarrow \frac{43 \times 4}{25 \times 4} = \frac{172}{100} = 1.72$ یا $\frac{43}{25} = 1 \frac{18}{25} = 1 \frac{18 \times 4}{25 \times 4} = 1 \frac{72}{100} = 1.72$
 $\frac{12}{125} \rightarrow \frac{12 \times 8}{125 \times 8} = \frac{96}{1000} = 0.096$

نکته: گاهی اوقات ممکن است که نتوانیم مخرج را با ضرب عددها به ۱۰ یا ۱۰۰ یا ۱۰۰۰ تبدیل کنیم و در این صورت یا باید ابتدا در صورت امکان کسر را ساده کنیم و یا اگر این کار ممکن نباشد، با تقسیم صورت کسر بر مخرج، آن را به عدد اعشاری تبدیل کنیم.

مثال: عدد $\frac{21}{12}$ را به صورت عدد اعشاری بنویسید.

پاسخ:

$$\frac{21 \div 3}{12 \div 3} = \frac{7}{4} = 1 \frac{3}{4} \rightarrow 1 \frac{3 \times 25}{4 \times 25} = 1 \frac{75}{100} = 1.75$$

مقایسه ی عددهای اعشاری

برای مقایسه ی اعداد اعشاری، ابتدا قسمت صحیح آن ها را مقایسه می کنیم، هر عددی که قسمت صحیح آن بزرگ تر باشد، آن عدد بزرگ تر است. اگر قسمت های صحیح دو عدد مساوی باشند، به ترتیب دهم، صدم و هزارم و ... آن ها را مقایسه می کنیم، دهم هر عددی که بزرگ تر بود، آن عدد بزرگ تر است و اگر دهم ها نیز مساوی باشند، صدم هر عددی که بزرگ تر باشد، آن عدد بزرگ تر است و ...

مثال: عددهای اعشاری زیر را مقایسه می کنیم.

$$9/01 \bigcirc 8/9873 \rightarrow 9/01 > 8/9873$$

چون عدد صحیح ۹ بزرگ تر از عدد صحیح ۸ است، پس عدد ۹/۰۱ از عدد ۸/۹۸۷۳ بزرگ تر است.

$$19/3874 \bigcirc 19/3859 \rightarrow 19/3874 > 19/3859$$

چون قسمت های صحیح و رقم های دهم و صدم دو عدد مساوی است، بنابراین رقم هزارم آن ها را مقایسه می کنیم:

$$19/3874 > 19/3859$$

نکته: اگر رقم دهم یک عدد اعشاری کوچک تر از یک، از ۴ بیشتر باشد، آن عدد از نصف کم تر نیست (یا مساوی نصف است و یا از نصف بیشتر است)؛

مانند:

$$0/500 = \text{نصف} \quad 0/6, 0/800002, 0/73$$

بزرگ تر از نصف هستند.

جمع و تفریق عددهای اعشاری

در جمع و تفریق عددهای اعشاری باید دقت کنیم که ممیزها خیلی دقیق زیر هم قرار گیرند. به این ترتیب رقم های هم مرتبه نیز زیر هم قرار می گیرند؛ یعنی یکان ها زیر هم، دهم ها زیر هم، صدم ها زیر هم و

مثال: حاصل جمع و تفریق های زیر را حساب کنید.

$$18/29 + 3/4 = \quad 7/1 - 2/76 =$$

پاسخ: ابتدا عددها را در جدول ارزش مکانی قرار می دهیم تا رقم های هم مرتبه زیر هم قرار گیرند.

ممیز				
هزارم	صدم	دهم	یکان	دهگان
	۹	۲	۸	۱
	۰	۴	۳	+
	۹	۶	۱	۲

ممیز				
هزارم	صدم	دهم	یکان	دهگان
	۱۰	۱۰	۶	
	۶	۷	۲	-
	۴	۳	۴	

یادآوری ۲

در سال های قبل با اعداد اعشاری آشنا شدید و دیدید که این اعداد کاربردهای زیادی در زندگی روزمره ی ما و در زمینه های مختلف دارند. به طور مثال، برای بیان رکوردهای ورزشی از عددهای اعشاری استفاده می شود. همچنین از این اعداد در بیان ارتفاع، وزن، نمره ی درسی و ... هم استفاده می کنیم.

هر عدد اعشاری دارای دو قسمت است:

- ۱- قسمت صحیح: این قسمت در سمت چپ خط اعشار (ممیز) قرار می گیرد. مانند: ۷۰۴/۰۲۸ یا ۱۳/۶۹
- ۲- قسمت اعشاری: این قسمت در سمت راست خط اعشار (ممیز) قرار می گیرد. مانند: ۷۰۴/۰۲۸ یا ۱۳/۶۹

به کسرهایی که مخرج آن ها ۱۰، ۱۰۰، ۱۰۰۰ یا ... باشد، کسر اعشاری می گویند. مانند: $\frac{۱۳۵}{۱۰}$ ، $\frac{۱۳۵}{۱۰۰}$ و $\frac{۱۳۵}{۱۰۰۰}$

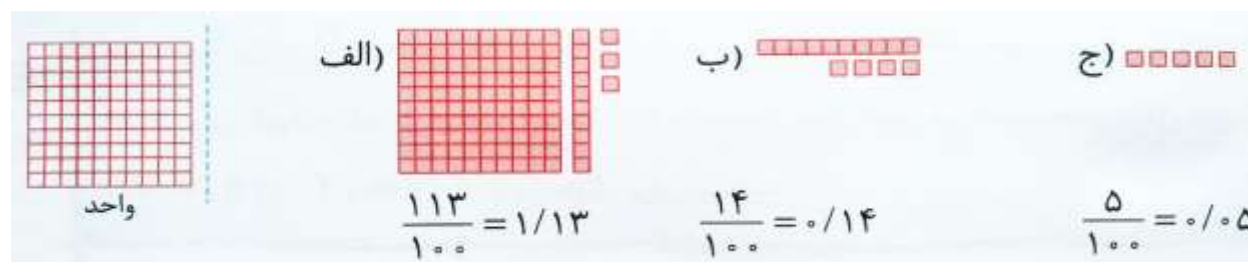
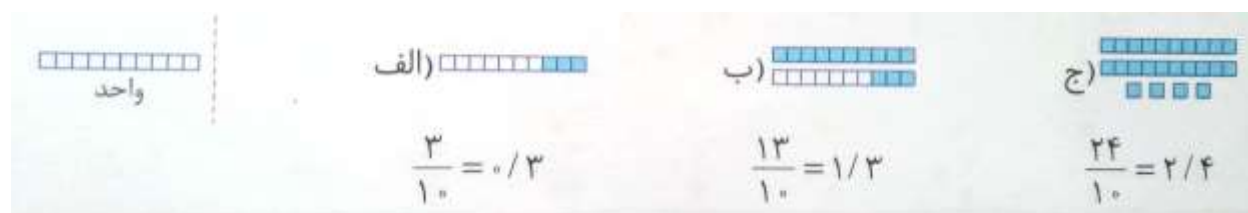
کسرهای اعشاری را می توان به صورت عددهای اعشاری در جدول ارزش مکانی نوشت. به این ترتیب کسرهای اعشاری بالا را می توانیم به صورت $\frac{۱۳}{۵}$ ، $\frac{۱}{۳۵}$ و $\frac{۰}{۱۳۵}$ هم بنویسیم و آن ها را به صورت زیر بخوانیم:

$\frac{۱۳}{۵}$: سیزده و پنج صدم یا سیزده و نیم

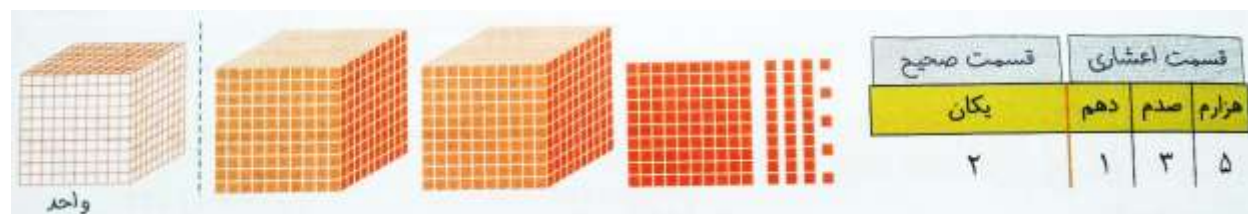
$\frac{۱}{۳۵}$: یک وسی و پنج صدم

$\frac{۰}{۱۳۵}$: صد و سی و پنج هزارم

هر عدد اعشاری را می توان هم با شکل و هم روی محور نمایش داد. به شکل های زیر و عدد اعشاری نمایش داده شده توسط آن ها دقت کنید.



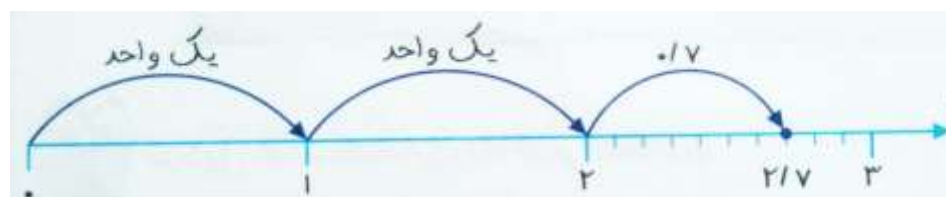
مثال ۱: عدد ۲/۱۳۵ را هم با شکل و هم در جدول ارزش مکانی نمایش دهید.



مثال ۲: عدد ۲/۷ را روی محور نمایش دهید.

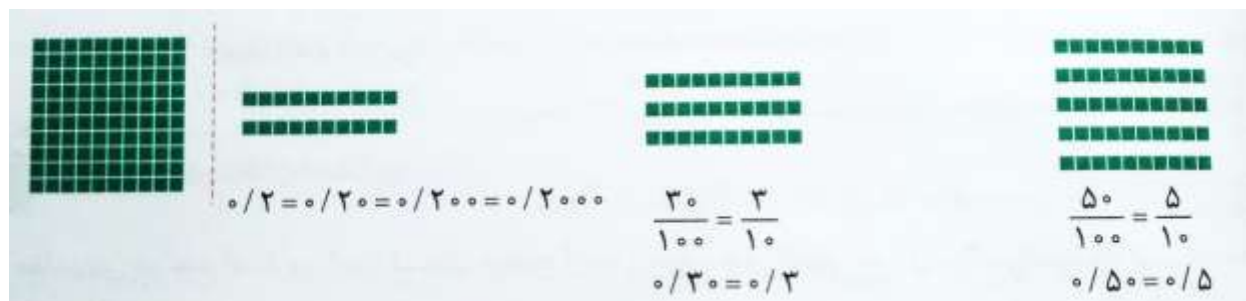
برای نمایش یک عدد اعشاری مانند ۲/۷ روی محور، باید مراحل زیر را انجام دهیم:

- ۱- محور اعداد را رسم کرده و واحدها را روی آن مشخص کنیم.
- ۲- به اندازه ی قسمت صحیح عدد اعشاری مورد نظر (یعنی ۲ واحد)، از صفر شروع به شمردن واحدها می کنیم.
- ۳- با توجه به قسمت اعشاری عدد موردنظر (که در این جا ۰/۷ است)، روی محور بین ۲ و ۳ را به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم می کنیم. به این ترتیب هر قسمت ۰/۱ می شود، پس ۷ تا ۰/۱ شمرده و به جلو می رویم تا نقطه ی نمایش عدد ۲/۷ مشخص شود.



صفر در قسمت اعشاری

به شکل های زیر و تساوی های نوشته شده دقت کنید.



تساوی های بالا نشان می دهند که اگر بعد از آخرین رقم اعشاری هر عددی، به تعداد دلخواه صفر قرار دهیم، آن عدد هیچ تغییری نمی کند. از این خاصیت در جمع، تفریق و تقسیم عددهای اعشاری استفاده می کنیم.

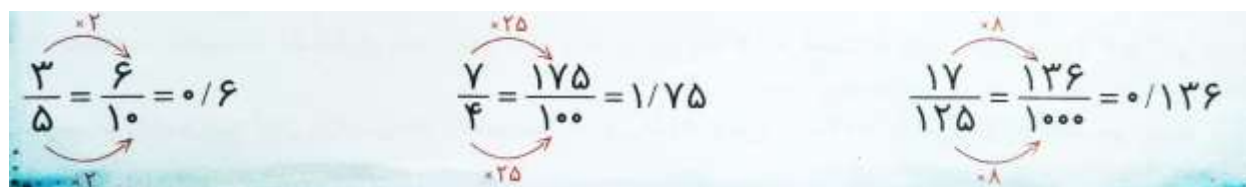
نکته: اگر در بین رقم های اعشاری عددی، صفر قرار دهیم، آن عدد تغییر می کند. به طور مثال هیچ یک از عددهای $3/75$ ، $3/075$ و $3/705$ با یک دیگر برابر نیستند.

تبدیل کسر اعشاری به عدد اعشاری

برای تبدیل کسرهایی مانند $\frac{75}{100}$ ، $\frac{3}{100}$ ، $\frac{243}{1000}$ و ... (که مخرج آن ها ۱۰، ۱۰۰، ۱۰۰۰ و ... می باشد) به عدد اعشاری، ابتدا صورت کسر را می نویسیم و به تعداد صفرهای مخرج از سمت راست عدد، رقم های اعشاری را جدا کرده و ممیز می زنیم.



نکته: در تبدیل کسرهایی مانند $\frac{3}{4}$ ، $\frac{7}{5}$ و $\frac{17}{125}$ (که مخرج آن ها ۱۰، ۱۰۰، ۱۰۰۰ و ... نیست) به عدد اعشاری، باید با توجه به تساوی کسرها صورت و مخرج کسر را در عددی ضرب کنیم تا مخرج کسر حاصل یکی از عددهای ۱۰، ۱۰۰، ۱۰۰۰ و ... شود و کسر اعشاری به دست آید.



تبدیل عدد اعشاری به کسر اعشاری

ابتدا عدد را بدون ممیز در صورت کسر می نویسیم و در مخرج کسر به تعداد رقم های اعشاری عدد، جلوی عدد یک، صفر می گذاریم.

$$\begin{array}{l} 37 / 452 = \frac{37452}{1000} \\ \text{سه رقم اعشار دارد پس} \\ \text{سه رقم صفر می نویسیم.} \end{array} \quad \begin{array}{l} 892 / 75 = \frac{89275}{100} \\ \text{دو رقم اعشار دارد پس} \\ \text{دو رقم صفر می نویسیم.} \end{array} \quad \begin{array}{l} 879 / 6 = \frac{8796}{10} \\ \text{یک رقم اعشار دارد پس} \\ \text{یک رقم صفر می نویسیم.} \end{array}$$

مقایسه ی عددهای اعشاری

برای مقایسه ی دو عدد اعشاری، ابتدا قسمت صحیح آن ها را مقایسه می کنیم. عددی بزرگ تر است که قسمت صحیح آن بزرگ تر باشد.

$$5 / 783 > 2 / 9999 \quad 0 / 9876 < 1 / 7$$

در صورتی که قسمت صحیح دو عدد برابر بود، دهم ها را با هم مقایسه می کنیم. عددی بزرگ تر است که دهم آن بزرگ تر باشد.

در صورت تساوی دهم ها باید صدم ها را مقایسه کنیم و این عمل را تا جایی ادامه دهیم که عدد بزرگ تر معلوم شود.

$$5 / 7 > 5 / 37 \quad 13 / 235 < 13 / 25 \quad 7 / 029 > 7 / 0285 \quad 17 / 53 = 17 / 5300$$

مثال ۳: ۱۰ کارت با رقم های ۰ تا ۹ و یک کارت با نماد ممیز داریم؛



الف) اگر عدد ۵۱ را در سمت چپ ممیز بسازیم، با ۵ کارت دیگر در قسمت اعشاری (سمت راست ممیز) نزدیک ترین عدد ممکن به ۵۱ را بسازید.

یعنی: $51 / 02346$

ب) اگر عدد ۵۱ را در سمت چپ ممیز بسازیم، با ۵ کارت دیگر در قسمت اعشاری (سمت راست ممیز) نزدیک ترین عدد ممکن به ۵۲ را بسازید.



مثال ۴: هر یک از عددهای زیر را به صورت گسترده بنویسید.

$$\begin{array}{ll} \text{الف)} & ۵۲/۰۳ = ۵۲/۰۳ = ۵۰ + ۲ + ۰/۰۳ \\ \text{ب)} & ۴۱۲/۰۱۹ = ۴۱۲/۰۱۹ = ۴۰۰ + ۱۰ + ۲ + ۰/۱۰ + ۰/۰۰۹ \\ \text{ج)} & ۵ \frac{۷۲}{۱۰۰} = ۵ + \frac{۷۰ + ۲}{۱۰۰} = ۵ + \frac{۷۰}{۱۰۰} + \frac{۲}{۱۰۰} \\ \text{د)} & \frac{۳۰۵}{۱۰۰۰} = \frac{۳۰۰ + ۵}{۱۰۰۰} = \frac{۳۰۰}{۱۰۰۰} + \frac{۵}{۱۰۰۰} = \frac{۳}{۱۰} + \frac{۵}{۱۰۰۰} \end{array}$$

جمع و تفریق عددهای اعشاری

در سال قبل با روش های مختلف محاسبه ی جمع و تفریق عددهای اعشاری از قبیل رسم شکل، رسم محور، تبدیل به کسر، گسترده نویسی و روش جدول ارزش مکانی (یا همان زیر هم نویسی) آشنا شدید و ملاحظه کردید که روش زیر هم نویسی سریع ترین و ساده ترین روش محاسبه بود. در این روش با توجه به ارزش مکانی عددها، باید ممیزها زیر هم و عددهای هم مرتبه ی هم، زیر هم نوشته شوند؛ یعنی یکان ها را زیر هم، دهم ها را زیر هم، و ... بنویسیم، سپس از کم ترین مرتبه، جمع یا تفریق مورد نظر را انجام دهیم و هر کجا که به ممیز رسیدیم، در جواب هم ممیز را بنویسیم. دقت داشته باشید که اگر عددی ممیز نداشته باشد، باید در سمت راست آن ممیز قرار دهیم.

مثال ۵: حاصل جمع ها و تفریق های زیر را بدست آورید.

$$\begin{array}{llll} \text{الف)} & ۵/۴۳ + ۱۷/۶ = & \text{ب)} & ۱۸ - ۵/۴۳ = \\ \begin{array}{r} ۵/۴۳ \\ + ۱۷/۶۰ \\ \hline ۲۳/۰۳ \end{array} & & \begin{array}{r} ۱۸ \\ - ۵/۴۳ \\ \hline ۱۲/۵۷ \end{array} & & \text{ج)} & ۷۲۴/۵ + ۷۲/۴۵ = \\ \begin{array}{r} ۷۲۴/۵۰ \\ + ۷۲/۴۵ \\ \hline ۷۹۶/۹۵ \end{array} & & \text{د)} & ۸/۵ - ۲/۰۹۵ = \\ \begin{array}{r} ۸/۵ \\ - ۲/۰۹۵ \\ \hline ۶/۴۰۵ \end{array} & & & & \end{array}$$

درس دوم - یادآوری ضرب و تقسیم

ضرب عددهای اعشاری

برای ضرب عددهای اعشاری در حالت کلی، ابتدا عددها را بدون در نظر گرفتن ممیز، مانند دو عدد صحیح در هم ضرب می کنیم و سپس مجموع تعداد ارقام اعشاری دو عدد را حساب کرده و به همان تعداد از سمت راست در حاصل ضرب، اعشار می زنیم.

مثال: حاصل ضرب مقابل را حساب کنید.

$$2/4 \times 1/51 =$$

پاسخ: ابتدا حاصل 24×151 را حساب می کنیم:

$$24 \times 151 = 3624$$

چون دو عدد روی هم سه رقم اعشار دارند، بنابراین در حاصل ضرب از سمت راست، سه رقم اعشار می زنیم:

$$2/4 \times 1/51 = 3/624$$

ضرب عددهای اعشاری به وسیله ی تبدیل اعداد اعشاری به کسر

مثال: حاصل ضرب مقابل را حساب کنید.

$$3/8 \times 2/74 =$$

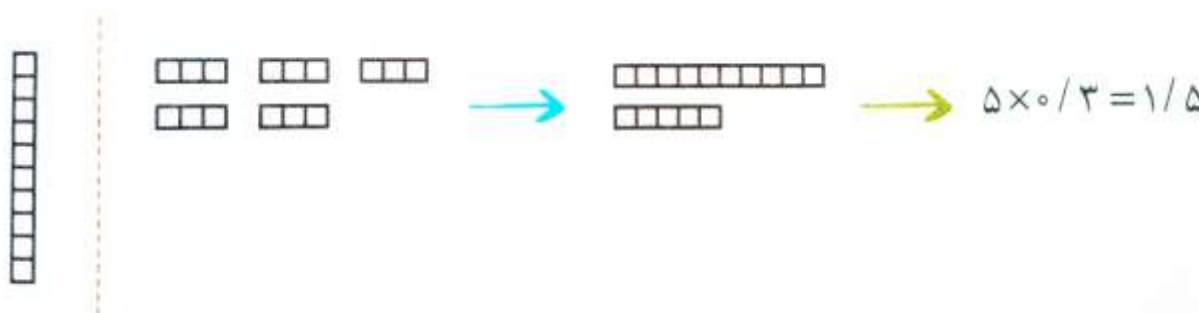
پاسخ:

$$3/8 \times 2/74 = \frac{38}{10} \times \frac{274}{100} = \frac{10412}{1000} = 10/412$$

ضرب عددهای اعشاری به وسیله ی شکل

مثال: حاصل ضرب مقابل را به وسیله ی شکل حساب کنید.

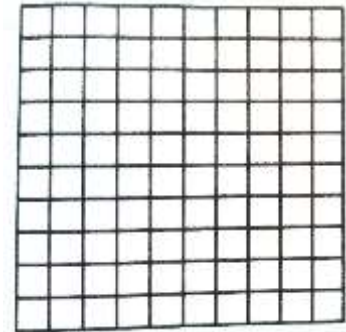
پاسخ:



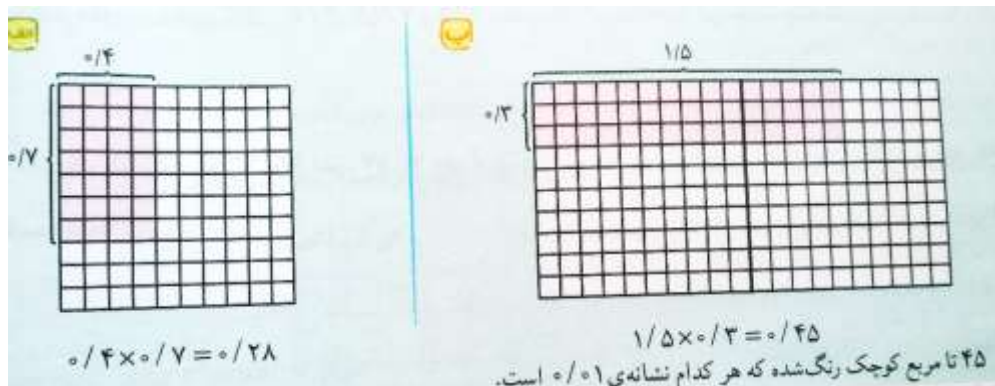
مثال: با توجه به واحد، حاصل ضرب های زیر را به وسیله ی شکل حساب کنید.

الف) $0/4 \times 0/7 =$

ب) $1/5 \times 0/3 =$



پاسخ: (توجه: هر کدام از مربع های کوچک $0/01$ را نشان می دهد.)

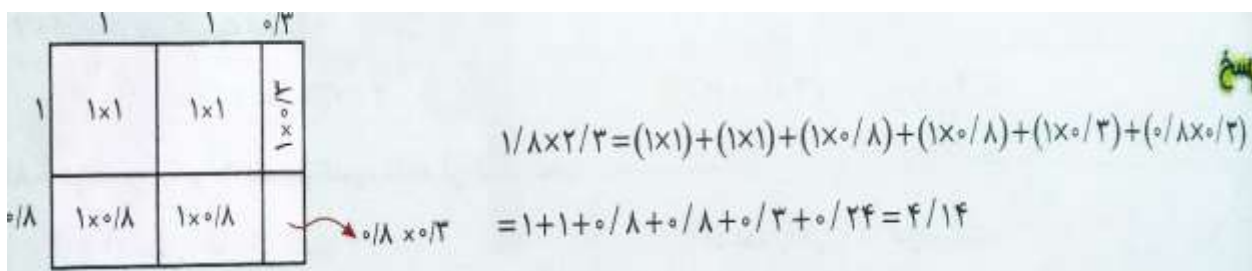


ضرب عددهای اعشاری به کمک مساحت (روش مساحتی)

$$1/8 \times 2/3 =$$

مثال: حاصل ضرب مقابل را حساب کنید.

پاسخ:

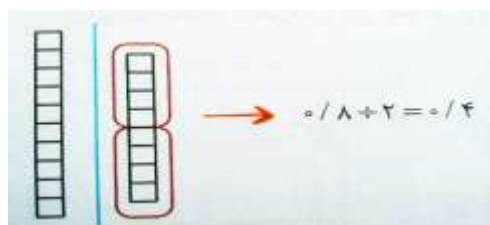


تقسیم عددهای اعشاری به وسیله ی شکل

$$0.8 \div 2 =$$

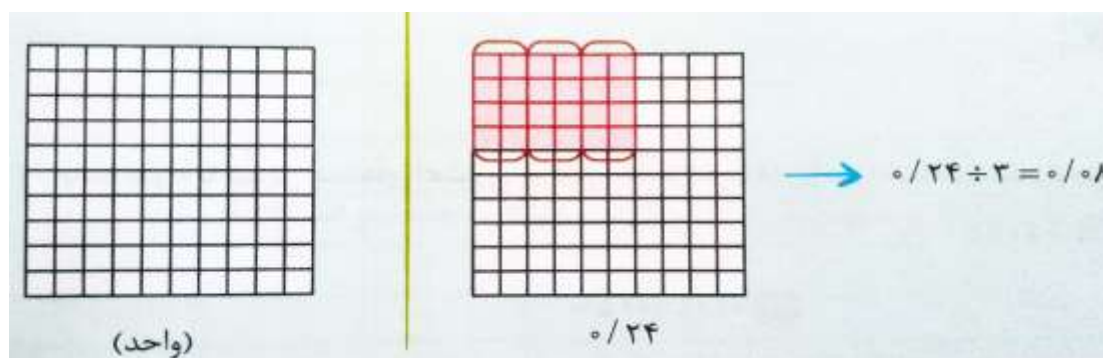
مثال: حاصل تقسیم مقابل را به وسیله ی شکل حساب کنید.

پاسخ:



$$0.24 \div 3 =$$

مثال: حاصل تقسیم مقابل را به وسیله ی شکل حساب کنید.

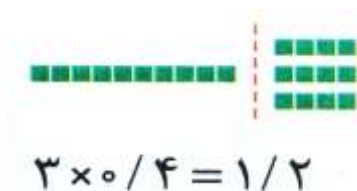


یادآوری ضرب و تقسیم ۲

یادآوری ضرب

در سال قبل با روش های مختلف محاسبه ی ضرب عددهای اعشاری آشنا شدید. در این بخش به یادآوری آن ها می پردازیم.

✓ روش اول: برای محاسبه ی حاصل ضرب یک عدد صحیح در یک عدد اعشاری (مانند 3×0.4) می توانیم از شکل زیر استفاده کنیم و با شمارش خانه ها، مقدار حاصل ضرب را که 1.2 می باشد، حساب کنیم.

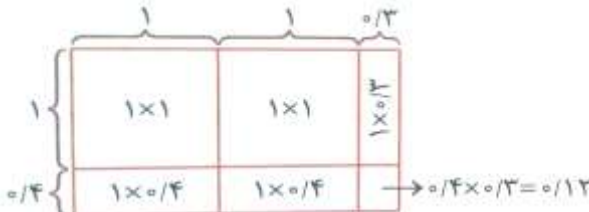


روش دوم (تبدیل به کسر): در این روش ابتدا اعداد اعشاری را به صورت کسری می نویسیم، سپس حاصل ضرب کسرها را ابتدا بدون ساده کردن آن ها به دست می آوریم و در آخر، جواب را به صورت اعشاری می نویسیم.

مثال ۱: به مثال های زیر دقت کنید:

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad 5/3 \times 0/25 &= \frac{53}{10} \times \frac{25}{100} = \frac{1325}{1000} = 1/325 \\ \text{ب)} \quad 0/2 \times 7/5 \times 12/3 &= \frac{2}{10} \times \frac{75}{10} \times \frac{123}{10} = \frac{18450}{1000} = 18/450 = 18/45 \end{aligned}$$

روش سوم (مساحتی): در این روش برای محاسبه ی حاصل ضرب عددهایی مانند $2/3$ و $1/4$ ، ابتدا یک مستطیل رسم می کنیم، طوری که طول مستطیل با عدد بزرگ تر و عرض آن با عدد کوچک تر برابر باشد. سپس مستطیل را مانند شکل زیر تقسیم بندی، و مساحت تمامی قسمت ها را با هم جمع می کنیم. به این ترتیب، حاصل ضرب دو عدد به دست می آید.

$$\begin{aligned} 2/3 \times 1/4 &= (2 \times 1) + (2 \times 0/4) + 0/3 + 0/12 \\ &= 2 + 0/8 + 0/3 + 0/12 = 3/22 \end{aligned}$$


روش چهارم (فرآیندی): در این روش ابتدا عددها را بدون در نظر گرفتن ممیزها در یک دیگر ضرب می کنیم، سپس به تعداد رقم های اعشاری کل عددها، در جواب به دست آمده از سمت راست اعشار می زنیم.

مثال ۲: $5/3 \times 0/25 = 1/325$ (الف)

ابتدا حاصل ضرب 53×25 را حساب می کنیم که برابر 1325 می شود، چون $5/3$ دارای یک رقم اعشاری و $0/25$ هم دارای دو رقم اعشاری است، برای جواب ضرب (یعنی 1325) از سمت راست سه رقم شمرده و ممیز را می زنیم.

$$\begin{aligned} \text{ب)} \quad 0/2 \times 7/5 \times 12/3 &= \\ 2 \times 75 \times 123 &= 18450 \Rightarrow 0/2 \times 7/5 \times 12/3 = 18/450 \end{aligned}$$

سه رقم اعشار

نکته:

۱- برای ضرب هر عدد اعشاری در عددهای ۱۰، ۱۰۰، ۱۰۰۰ و ... ، ابتدا خود عدد را می نویسیم، سپس ممیز را به تعداد صفرها به سمت راست (جلو) انتقال می دهیم. یعنی اگر عدد را در ۱۰ ضرب کردیم، باید ممیز را یک رقم به جلو منتقل کنیم و اگر در ۱۰۰ ضرب کردیم باید ممیز را دو رقم به سمت جلو منتقل کنیم و ...

$$۵۴/۳۲۷ \times ۱۰ = ۵۴۳/۲۷$$

$$۵۴/۳۲۷ \times ۱۰۰ = ۵۴۳۲/۷$$

$$۵۴/۳۲۷ \times ۱۰۰۰ = ۵۴۳۲۷$$

$$۵۴/۳۲۷ \times ۱۰۰۰۰ = ۵۴۳۲۷۰$$

۲- اگر هر عدد اعشاری را در ۰/۱ ضرب کنیم، ممیز آن یک رقم به سمت چپ (عقب) منتقل می شود و اگر در ۰/۰۱ ضرب کنیم، ممیز آن عدد، دو رقم به سمت چپ منتقل می شود و ...

$$۵۴/۳۲۷ \times ۰/۱ = ۵/۴۳۲۷$$

$$۵۴/۳۲۷ \times ۰/۰۱ = ۰/۵۴۳۲۷$$

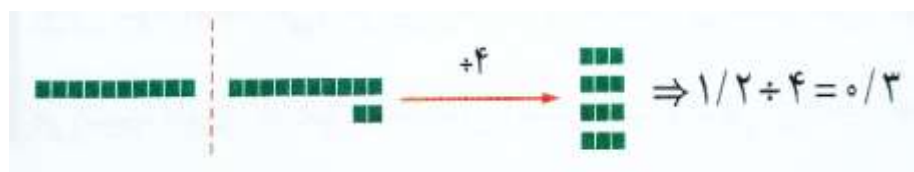
$$۵۴/۳۲۷ \times ۰/۰۰۱ = ۰/۰۵۴۳۲۷$$

$$۵۴/۳۲۷ \times ۰/۰۰۰۱ = ۰/۰۰۵۴۳۲۷$$

تقسیم اعشاری

برای انجام تقسیم اعشاری بر یک عدد صحیح (مانند: $۱/۲ \div ۴$) می توانیم از روش های زیر استفاده کنیم:

✓ روش اول (رسم شکل): در این روش، شکل مربوط به عدد اعشاری را رسم کرده، سپس آن را به قسمت های خواسته شده تقسیم بندی می کنیم.



✓ روش دوم (تبدیل به کسر): در این روش ابتدا عددهای اعشاری را به صورت کسری می نویسیم، سپس حاصل تقسیم کسرها را به دست می آوریم و در آخر در صورت نیاز، جواب را به صورت اعشاری می نویسیم.

مثال ۳:

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad 1/2 \div 4 &= \frac{12}{10} \div 4 = \frac{12}{10} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{10} = 0/3 \\ \text{ب)} \quad 2/97 \div 99 &= \frac{297}{100} \div 99 = \frac{297}{100} \times \frac{1}{99} = \frac{3}{100} = 0/03 \\ \text{ج)} \quad 0/441 \div 7 &= \frac{441}{1000} \div 7 = \frac{441}{1000} \times \frac{1}{7} = \frac{63}{1000} = 0/063 \end{aligned}$$

✓ روش سوم: در این روش، تقسیم را مانند یک تقسیم معمولی انجام می دهیم و هرگاه در مقسوم به ممیز رسیدیم، در خارج قسمت نیز ممیز می زنیم. دقت داشته باشید که در این گونه تقسیم ها، همواره تعداد ارقام اعشاری خارج قسمت و باقی مانده با تعداد ارقام اعشاری مقسوم برابر است.

مثال ۴: به مثال های زیر دقت کنید.

$$\begin{array}{l} \text{الف)} \quad \begin{array}{r} 1/2 \overline{) 4} \\ -1/2 \\ \hline 0/0 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{ب)} \quad \begin{array}{r} 2/97 \overline{) 99} \\ -0/0 \\ \hline 2/97 \\ -2/97 \\ \hline 0/00 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{ج)} \quad \begin{array}{r} 0/441 \overline{) 7} \\ -0 \\ \hline 0/44 \\ -0/42 \\ \hline 0/021 \\ -0/021 \\ \hline 0/000 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{د)} \quad \begin{array}{r} 8/5 \overline{) 6} \\ -6 \\ \hline 2/5 \\ -2/4 \\ \hline 0/1 \end{array} \end{array}$$

نکته: برای تقسیم هر عدد اعشاری بر عددهای ۱۰، ۱۰۰، ۱۰۰۰ و ...، ابتدا خود عدد را می نویسیم، سپس ممیز را به تعداد صفرها به سمت چپ (عقب) انتقال می دهیم. یعنی اگر عدد را بر ۱۰ تقسیم کنیم، باید ممیز را یک رقم به عقب منتقل کنیم و اگر عدد را بر ۱۰۰ تقسیم کنیم، باید ممیز را دو رقم به عقب منتقل کنیم و ...

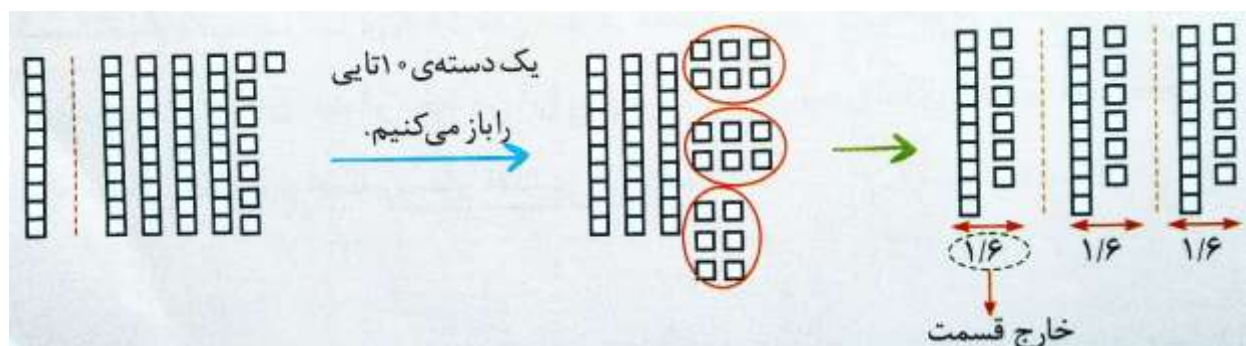
$$\begin{aligned} 794/63 \div 10 &= 79/463 & 794/63 + 100 &= 7/9463 \\ 794/63 + 10000 &= 0/79463 & 794/63 \div 10000 &= 0/079463 \end{aligned}$$

درس سوم - تقسیم عدد اعشاری بر عدد طبیعی

تقسیم اعداد اعشاری به کمک شکل

مثال: حاصل تقسیم مقابل را به کمک شکل حساب کنید.

$$4/8 \overline{) 3}$$



یادآوری تقسیم

برای اطمینان از درستی عمل تقسیم دو روش برای امتحان آن وجود دارد که به آن‌ها رابطه‌های تقسیم می‌گویند. توجه کنید که حتما باید هر رابطه را برای یک تقسیم بنویسیم و هر دو رابطه درست باشند.

مقسوم	مقسوم علیه
	خارج قسمت
باقی مانده	

۱) $\text{مقسوم} = \text{باقی مانده} + (\text{مقسوم علیه} \times \text{خارج قسمت})$: رابطه‌ی ۱

۲) $\text{مقسوم علیه} < \text{باقی مانده}$: رابطه‌ی ۲

مثال: آیا تقسیم مقابل درست انجام شده است؟

$$\begin{array}{r} 15 \overline{) 6} \\ - 6 \\ \hline 9 \end{array}$$

پاسخ: رابطه های تقسیم را می نویسیم.

رابطه ی اول نشان می دهد که تقسیم درست انجام شده است. $\rightarrow 15 = 1 \times 6 + 9$: رابطه ی ۱
غلط است. $\rightarrow 9 < 6$: رابطه ی ۲

چون باقی مانده از مقسوم علیه کوچک تر نیست، پس رابطه ی دوم غلط و در نتیجه تقسیم غلط انجام شده است.
نکته: اگر مقسوم و مقسوم علیه تقسیمی را در یک عدد (عدد غیرصفر) ضرب کنیم، خارج قسمت تغییر نمی کند، اما باقی مانده در همان عدد ضرب می شود.

مثال: در تقسیم زیر، مقسوم و مقسوم علیه را ۵ برابر کرده ایم، خارج قسمت تغییر نمی کند، اما باقی مانده ۵ برابر می شود.

تقسیم عدد اعشاری بر عدد طبیعی

در این حالت باید دقت کنیم که خارج قسمت تقسیم را باید تا چند رقم اعشار انجام دهیم. اگر تعداد رقم های اعشاری خواسته شده ی خارج قسمت بیشتر از تعداد رقم های اعشاری مقسوم باشد، با قرار دادن صفر در سمت راست رقم های اعشاری مقسوم، تعداد رقم های اعشاری مقسوم را با تعداد رقم های اعشاری خارج قسمت، برابر می کنیم.

مثال: تقسیم مقابل را تا یک رقم اعشار در خارج قسمت انجام دهید.

$$6/9 \overline{) 3}$$

$$\begin{array}{r} 6/9 \overline{) 3} \\ - 6 \\ \hline 0/9 \\ - 0/9 \\ \hline 0/0 \end{array}$$

خط ممیز

پاسخ: چون مقسوم دارای یک رقم اعشار است و می خواهیم تقسیم را نیز تا یک رقم اعشار در خارج قسمت انجام دهیم، پس نیازی به قراردادن صفر در مقسوم نیست. برای دقت در انجام عمل تقسیم و جلوگیری از اشتباه های احتمالی، خط ممیز را رسم می کنیم. خط ممیز، نشان دهنده ی ممیز عددها در تمام مراحل تقسیم و از جمله رقم های اعشاری باقی مانده است.

مثال: تقسیم مقابل را تا دو رقم اعشار در خارج قسمت انجام دهید و باقی مانده را نیز مشخص کنید.

$$7/1 \overline{) 6}$$

$$\begin{array}{r} 7/10 \overline{) 6} \\ - 6 \\ \hline 1/1 \\ - 0/6 \\ \hline 0/50 \\ - 0/48 \\ \hline 0/02 \end{array}$$

خط ممیز

پاسخ: چون باید تقسیم تا دو رقم اعشار در خارج قسمت انجام شود و مقسوم دارای یک رقم اعشار است، پس یک صفر در سمت راست رقم یک قرار می دهیم تا مقسوم هم دارای دو رقم اعشار شود.

نکته: هنگامی که رقم ۱ را پایین می آوریم، چون رقم ۱، رقم بعد از ممیز در مقسوم است، به همین دلیل در خارج قسمت ممیز می زنیم و تقسیم را ادامه می دهیم.

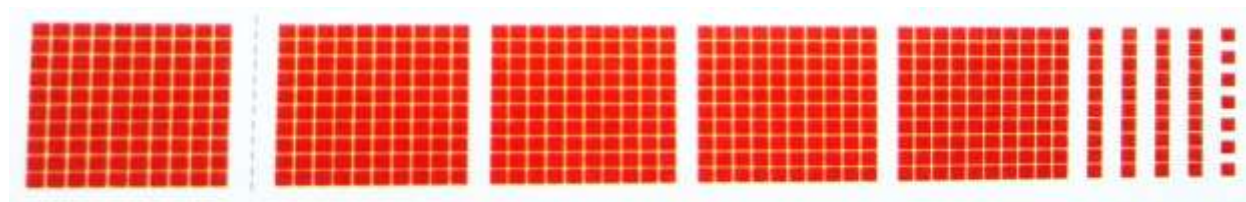
نکته: تعداد رقم های اعشاری باقی مانده، با تعداد رقم های اعشاری مقسوم، باید برابر باشد.

تقسیم عدد اعشاری بر عدد طبیعی ۲

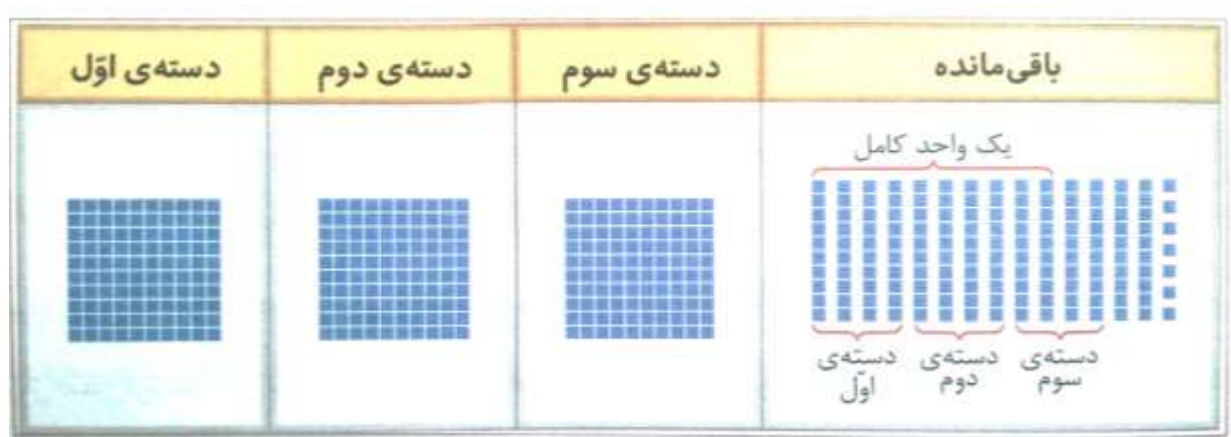
تقسیم به کمک رسم شکل

برای تقسیم عددی اعشاری مانند $4/47$ بر ۳، به صورت زیر عمل می کنیم:

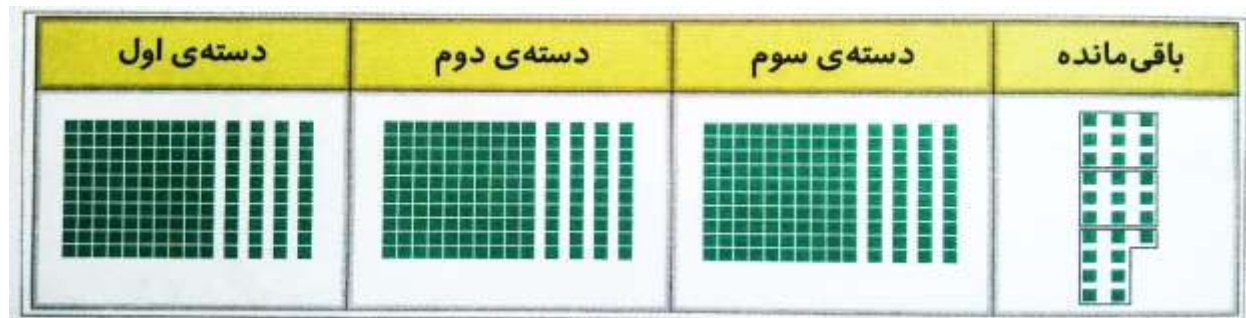
ابتدا با توجه به این که کوچک ترین مرتبه ی این عدد، صدم می باشد، پس هر واحد را به صد قسمت مساوی تقسیم می کنیم و شکل مربوط به این عدد اعشاری را رسم می کنیم.



حالا سه تا از واحدهای کامل را انتخاب می کنیم و به هر دسته یک واحد می دهیم. یکی از واحدهای کامل باقی می ماند که باید آن را باز کنیم و به ده تا $0/1$ تبدیل کنیم. به این ترتیب ۱۴ تا $0/1$ به وجود می آید. این ۱۴ تا $0/1$ را به سه قسمت مساوی تقسیم می کنیم که دو تا $0/1$ باقی می ماند.



حالا دو دسته $0/1$ باقی مانده را نیز باز می کنیم. به این ترتیب ۲۷ تا $0/1$ باقی می ماند که باید آن را به سه قسمت مساوی تقسیم کنیم.



در آخر ملاحظه می کنید که اگر $4/74$ را به سه قسمت مساوی تقسیم کنیم، هر قسمت مساوی $1/49$ خواهد شد.

دسته ی سوم	دسته ی دوم	دسته ی اول

تقسیم به روش محاسباتی

در این روش ابتدا خط ممیز را رسم می کنیم. این خط نشان دهنده ی تمام ممیزهایی است که در انجام تقسیم، در عددها قرار می گیرد. سپس تقسیم را مانند تقسیم معمولی انجام می دهیم و هرگاه در مقسوم به ممیز رسیدیم، در خارج قسمت هم ممیز می زنیم. دقت داشته باشید که در این گونه تقسیم ها، همواره تعداد ارقام اعشاری خارج قسمت و باقی مانده با تعداد ارقام اعشاری مقسوم برابر است.

مثال ۱: به تقسیم های زیر دقت کنید.

$\begin{array}{r} 3 \overline{) 45} \quad 11 \\ - 3 \quad 3 \quad 0/31 \\ \hline 0/15 \\ - \quad 11 \\ \hline 0/04 \end{array}$	$\begin{array}{r} 53 \overline{) 9} \quad 6 \\ - 48 \quad 8/9 \\ \hline 5/9 \\ - \quad 5/4 \\ \hline 0/5 \end{array}$	$\begin{array}{r} 0/438 \overline{) 6} \\ - 0 \quad 0 \quad 0/073 \\ \hline 0/43 \\ - 0/42 \\ \hline 0/018 \\ 0/018 \\ \hline 0/000 \end{array}$
---	---	--

پیشروی در تقسیم

گاهی اوقات برای آن که جواب دقیق تری از تقسیم به دست آید، می توانیم در سمت راست قسمت اعشاری مقسوم، به تعداد مورد نیاز صفر فرار داده و تقسیم کردن را ادامه دهیم. به این ترتیب خارج قسمت دقیق تری به دست می آید. در اصطلاح به این عمل پیشروی در تقسیم می گوئیم.

مثال ۲: به تقسیم های زیر دقت کنید.

$\begin{array}{r} 13 \overline{) 7} \quad \quad 7 \\ - 7 \\ \hline 0 \end{array}$	$\xrightarrow{\text{پیشروی تا دو رقم اعشار}}$	$\begin{array}{r} 13 \overline{) 70} \quad \quad 7 \\ - 7 \\ \hline 0 \end{array}$	$\xrightarrow{\text{پیشروی تا سه رقم اعشار}}$	$\begin{array}{r} 13 \overline{) 700} \quad \quad 7 \\ - 7 \\ \hline 0 \end{array}$
---	---	--	---	---

باقی مانده ی صفر برسیم. که ضخامت هر ورق آن ۰/۰۱۲ سانتی متر می شود.

مثال ۳: ضخامت کتابی ۲۵۰ صفحه ای، ۱/۵ سانتی متر است. ضخامت هر برگ این کتاب چند سانتی متر است؟

$$\begin{array}{r} 1 \overline{) 250} \quad | \quad 125 \\ - 1 \\ \hline 0 \end{array}$$

دقت داشته باشید که ۲۵۰ صفحه یعنی ۱۲۵ برگ (هر برگ دو صفحه است). کافی است که عدد ۱/۵ را بر ۱۲۵ تقسیم کنیم و با پیشروی در تقسیم، به

درس چهارم – تقسیم یک عدد بر عدد اعشاری

در این نوع تقسیم ها ابتدا باید مقسوم و مقسوم علیه را در یکی از اعداد ۱۰ یا ۱۰۰ یا ۱۰۰۰ ضرب کنیم (با توجه به تعداد رقم های اعشاری مقسوم علیه) تا مقسوم علیه به عدد طبیعی تبدیل شود و سپس باید مانند تقسیم عدد اعشاری بر عدد طبیعی، تقسیم را انجام دهیم، فقط باید دقت کنیم که این تقسیم، تقسیم اصلی نیست (تقسیم کمکی است). خارج قسمت تقسیم اصلی، با خارج قسمت تقسیم کمکی برابر است، اما برای تعیین باقی مانده ی تقسیم اصلی، باید باقی مانده ی تقسیم کمکی را بر همان عددی که مقسوم و مقسوم علیه در آن ضرب شده، تقسیم کنیم.

مثال: تقسیم مقابل را انجام دهید و باقی مانده را مشخص کنید.

$$1/4 \overline{) 0.03}$$

پاسخ: ابتدا مقسوم و مقسوم علیه را در عدد ۱۰۰ ضرب می کنیم تا مقسوم علیه به عدد صحیح تبدیل شود. (توجه کنید که با این کار، باقی مانده ی تقسیم نیز ۱۰۰ برابر می شود).

The diagram illustrates the process of converting a decimal division into a whole number division. On the left, the original problem is $1/4 \overline{) 0.03}$ with a remainder of ۴۶ and a decimal remainder of ۰/۰۲. A green arrow labeled $\times 100$ points to the right, where the converted problem is $140 \overline{) 3}$. The long division of 140 by 3 is shown, resulting in a quotient of ۴۶ and a remainder of ۲. A blue arrow labeled $\div 100$ points from the remainder ۲ back to the original remainder area.

مثال: تقسیم مقابل را تا دو رقم اعشار در خارج قسمت انجام دهید و باقی مانده را مشخص کنید.

$$8 \overline{) 0.7}$$

پاسخ: ابتدا مقسوم و مقسوم علیه را در ۱۰ ضرب می کنیم تا مقسوم علیه به عدد طبیعی تبدیل شود.

The diagram illustrates the process of converting a decimal division into a whole number division. On the left, the original problem is $8 \overline{) 0.7}$ with a remainder of ۱۱/۴۲ and a decimal remainder of ۰/۰۰۶. A green arrow labeled $\times 10$ points to the right, where the converted problem is $80 \overline{) 7}$. The long division of 80 by 7 is shown, resulting in a quotient of ۱۱ and a remainder of ۳. A red arrow labeled $\div 10$ points from the remainder ۳ back to the original remainder area.

نکته: خارج قسمت تقسیم اصلی همیشه با خارج قسمت تقسیم کمکی برابر است. برای تعیین تعداد رقم های اعشاری باقی مانده ی اصلی، می توان از روش ساده تری نیز استفاده کرد، به این ترتیب که تعداد رقم های اعشاری باقی مانده ی تقسیم با مجموع تعداد رقم های اعشاری مقسوم علیه و خارج قسمت برابر است.

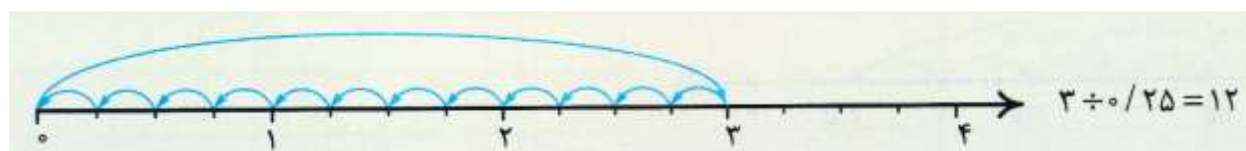
مثال: حاصل تقسیم مقابل را با محور حساب کنید. $1/5 \div 0/5 =$

پاسخ: چون مقسوم علیه $0/5$ است، هر واحد را به دو قسمت تقسیم می کنیم.



مثال: حاصل تقسیم مقابل را با محور حساب کنید. $3 \div 0/25 =$

پاسخ: چون مقسوم علیه $0/25$ است ($0/25 = \frac{1}{4}$)، هر واحد را به چهار قسمت تقسیم می کنیم.



تقسیم یک عدد بر عدد اعشاری ۲

به تقسیم های زیر دقت کنید:

مقسوم و مقسوم علیه ($\times 10$)

$$\begin{array}{r} 7 \overline{) 51} \\ - 51 \\ \hline 0 \end{array} \xrightarrow[\times 2]{\text{مقسوم و مقسوم علیه}} \begin{array}{r} 14 \overline{) 101} \\ - 100 \\ \hline 1 \end{array} \xrightarrow[\times 5]{\text{مقسوم و مقسوم علیه}} \begin{array}{r} 70 \overline{) 510} \\ - 500 \\ \hline 10 \end{array} \xrightarrow[\times 7]{\text{مقسوم و مقسوم علیه}} \begin{array}{r} 490 \overline{) 3500} \\ - 3500 \\ \hline 0 \end{array}$$

همان طور که ملاحظه می کنید، اگر مقسوم و مقسوم علیه تقسیمی را در عددی غیر از صفر ضرب کنیم، خارج قسمت تغییر نمی کند، اما باقی مانده نیز در همان عدد ضرب می شود.

همان طور که ملاحظه می کنید، اگر مقسوم و مقسوم علیه تقسیمی را در عددی غیر از صفر ضرب کنیم، خارج قسمت تغییر نمی کند، اما باقی مانده نیز در همان عدد ضرب می شود.

با توجه به خاصیت بالا، می توانیم تقسیم هایی را که مقسوم علیه اعشاری دارند، به تقسیمی که مقسوم علیه طبیعی دارند، تبدیل کنیم. کافی است که با توجه به تعداد ارقام اعشاری مقسوم علیه، هم مقسوم و هم مقسوم علیه را در یکی از عددهای ۱۰، ۱۰۰، ۱۰۰۰ و ... ضرب کنیم.

به این ترتیب، ممیز مقسوم علیه از بین می رود و به عدد صحیح تبدیل می شود و تقسیم به صورت تقسیم درس قبل تبدیل می شود و می توانیم به سادگی حاصل تقسیم را به دست آوریم.

اگر مقسوم و مقسوم علیه را در ۱۰ ضرب کنیم، باقی مانده هم ده برابر می شود و اگر در ۱۰۰ ضرب کنیم، باقی مانده هم صد برابر می شود، لذا برای تعیین باقی مانده ی اصلی تقسیم، باید باقی مانده ی به دست آمده را بر همان عددی که مقسوم و مقسوم علیه را در آن ضرب کردیم (یعنی ۱۰، ۱۰۰، ۱۰۰۰ و ...) تقسیم کنیم.

مثال ۱:

الف) $1.3 \overline{) 0.7}$ $\xrightarrow[\times 1000]{\text{مقسوم و مقسوم علیه}} 1300 \overline{) 7}$

خارج قسمت اصلی $\rightarrow$ 18

باقی مانده ی اصلی $\leftarrow$ 600

باقی مانده ی اصلی $\div 1000 = 0.6$

چون کوچک ترین مرتبه ی مقسوم علیه (یعنی ۰/۷)، صدم بود، برای تبدیل ۰/۷ به عدد صحیح، باید هم مقسوم و هم مقسوم علیه این تقسیم را صد برابر کنیم.

$$\begin{array}{r} 7 \overline{) 53.0} \\ \underline{-4} \\ 13 \\ \underline{-12} \\ 1 \end{array}$$

مقسوم و مقسوم علیه $\times 10$

$$\begin{array}{r} 75.3 \overline{) 4} \\ \underline{-4} \\ 0 \\ \underline{-0} \\ 0 \end{array}$$

خارج قسمت اصلی $18/8$
 باقی مانده ی اصلی $\div 10$

$$\begin{array}{r} 0.1 \end{array}$$

مثال ۲: حاصل تقسیم $0.07 \div 5$ را تا یک رقم اعشار در خارج قسمت به دست آورید.

$$\begin{array}{r} 5 \overline{) 0.07} \\ \underline{-0} \\ 7 \\ \underline{-5} \\ 2 \end{array}$$

مقسوم و مقسوم علیه $\times 100$

$$\begin{array}{r} 500.0 \overline{) 7} \\ \underline{-49} \\ 1 \\ \underline{-0} \\ 1 \\ \underline{-0} \\ 1 \\ \underline{-0} \\ 1 \end{array}$$

باقی مانده ی اصلی $\div 100$

$$\begin{array}{r} 0.002 \end{array}$$

مثال ۳: به کمک ماشین حساب خارج قسمت تقسیم $5/3 \div 0.72$ را تا دو رقم اعشار به دست آورید و بدون محاسبه ی تقسیم، باقی مانده ی آن را تعیین کنید.

با استفاده از ماشین حساب، حاصل تقسیم $5/3$ بر 0.72 تا دو رقم اعشار برابر $7/36$ خواهد شد. حالا با استفاده از رابطه ی تقسیم زیر، می توانیم مقدار باقی مانده را به دست آوریم:

$$\text{باقی مانده} = \text{مقسوم} - (\text{خارج قسمت} \times \text{مقسوم علیه})$$

$$\text{باقی مانده ی تقسیم} = 5/3 - (7/36 \times 0.72) = 5/3 - 5/2992 = 0.0008$$

انجام تقسیم با روش تبدیل به کسر

اگر مقسوم علیه تقسیمی عدد اعشاری باشد، می توانیم عدد اعشاری را به صورت کسری بنویسیم و با انجام تقسیم کسرها، حاصل تقسیم را به دست آوریم.

مثال ۴: به مثال های زیر دقت کنید.

$$\text{الف) } 0.34 \div 1.7 = \frac{34}{100} \div \frac{17}{10} = \frac{34}{100} \times \frac{10}{17} = \frac{2}{10} = 0.2$$

$$\text{ب) } 4 \div 0.8 = 4 \div \frac{8}{100} = \frac{4}{1} \times \frac{100}{8} = \frac{100}{2} = 50$$

$$\text{ج) } \frac{7.2}{0.6} = 7.2 \div 0.6 = \frac{72}{10} \div \frac{6}{100} = \frac{72}{10} \times \frac{100}{6} = 120$$

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{9}{15} = \frac{12}{20} = \frac{15}{25} = \dots$$

یادآوری: اگر صورت و مخرج کسری را در عددی (غیر از صفر) ضرب کنیم، کسر حاصل با کسر اولیه برابر است.

از نکته ی بالا می توانیم برای ساده کردن کسرهایی که صورت و مخرج آن ها اعشاری است، استفاده کنیم.

مثال ۵:

$$\text{الف) } \frac{0.34}{1.7} = \frac{34}{170} = \frac{2}{10}$$

$$\text{ج) } \frac{7.2}{0.6} = \frac{720}{60} = 120$$

$$\text{ب) } \frac{4}{0.8} = \frac{400}{80} = 50$$

$$\text{د) } \frac{1.5}{0.12} = \frac{150}{12} = \frac{25}{2}$$

مریم عزیزی

فصل چهارم - تقارن و مختصات

درس اول - مرکز تقارن و تقارن مرکزی

نکته: تقارن یا قرینه یابی نسبت به یک نقطه را تقارن مرکزی می گویند.

نکته: در تقارن مرکزی شکل به اندازه ی نیم دور (180° درجه)، حول (دور) نقطه ی داده شده می چرخد.

مثال: قرینه ی نقطه ی (ب) را نسبت به نقطه ی (م) رسم کنید.

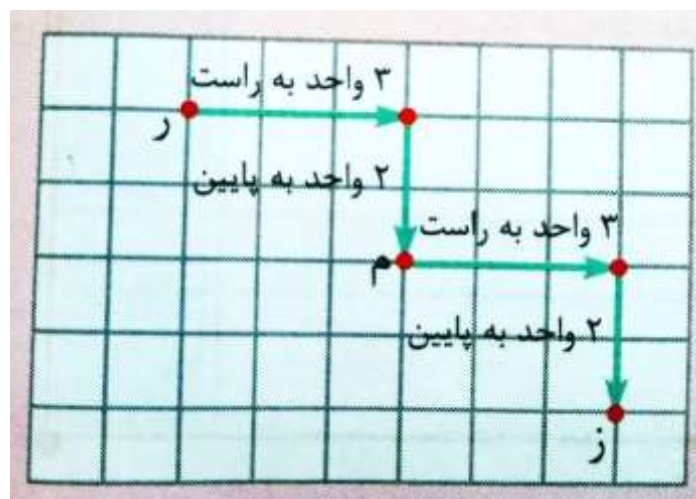


پاسخ: با خط کش از نقطه ی «ب» به نقطه ی «م» وصل می کنیم و سپس پاره خط «م ب» را به اندازه ی خودش ادامه می دهیم تا نقطه ی «پ» به دست آید. نقطه ی «پ» قرینه ی نقطه ی «ب» نسبت به نقطه ی «م» است.

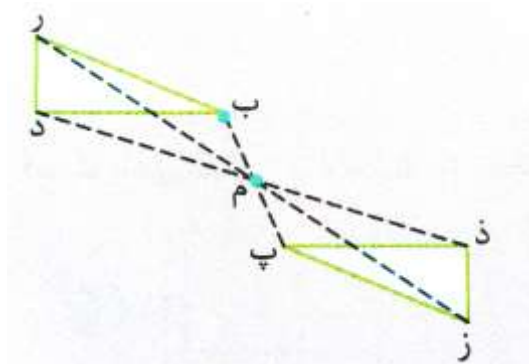
نکته: در صفحات شطرنجی بدون استفاده از خط کش نیز می توان قرینه ی یک نقطه را نسبت به نقطه ی دیگر یافت.

مثال: قرینه ی نقطه ی «ر» را در صفحه ی مقابل نسبت به نقطه ی «م» بیابید.

پاسخ: نقطه ی «ز» قرینه ی نقطه ی «ر» نسبت به نقطه ی «م» است.

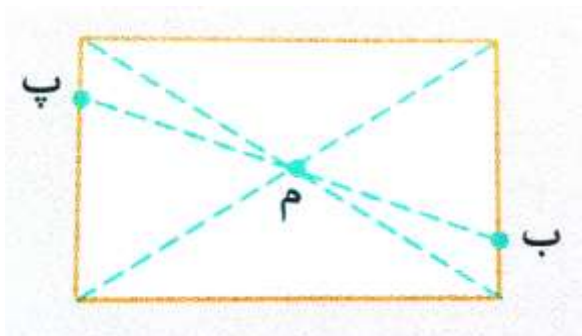


مثال: قرینه ی شکل مقابل را نسبت به نقطه ی «م» رسم کنید.



پاسخ: به وسیله ی خط کش، قرینه ی هر یک از نقطه های «ز» و «ب» و «د» را نسبت به نقطه ی «م» پیدا کرده و آن ها را به هم وصل می کنیم.

اگر مستطیل را 180° درجه حول (دور) نقطه ی «م» بچرخانیم، روی خودش منطبق می شود.

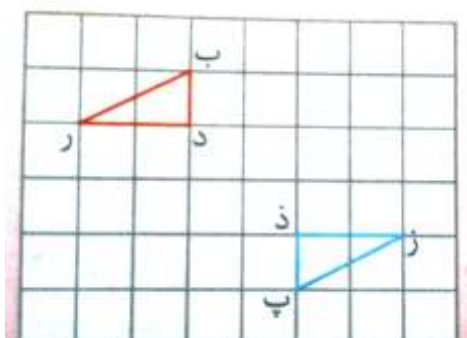


نکته: اگر نقطه ای مانند «م» در داخل یک شکل وجود داشته باشد که قرینه ی هر نقطه روی محیط شکل، نسبت به نقطه ی «م»، نقطه ای روی محیط باشد، می گوییم نقطه ی «م» مرکز تقارن شکل است.

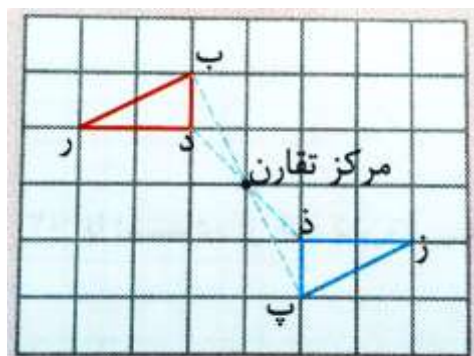
مثال: نقطه ی برخورد قطرهای مستطیل، مرکز تقارن مستطیل است، یعنی مستطیل تقارن مرکزی دارد.

نکته: در تقارن مرکزی، اگر بخواهیم مرکز تقارن یک شکل و قرینه اش را بیابیم، باید دو نقطه از شکل را مشخص کنیم و هر نقطه را توسط یک پاره خط به قرینه اش وصل کنیم. نقطه ی برخورد دو پاره خط، مرکز تقارن است.

مثال: در شکل مقابل، مثلث «ب د ر» را 180° درجه دوران داده ایم. مرکز تقارن را بیابید.

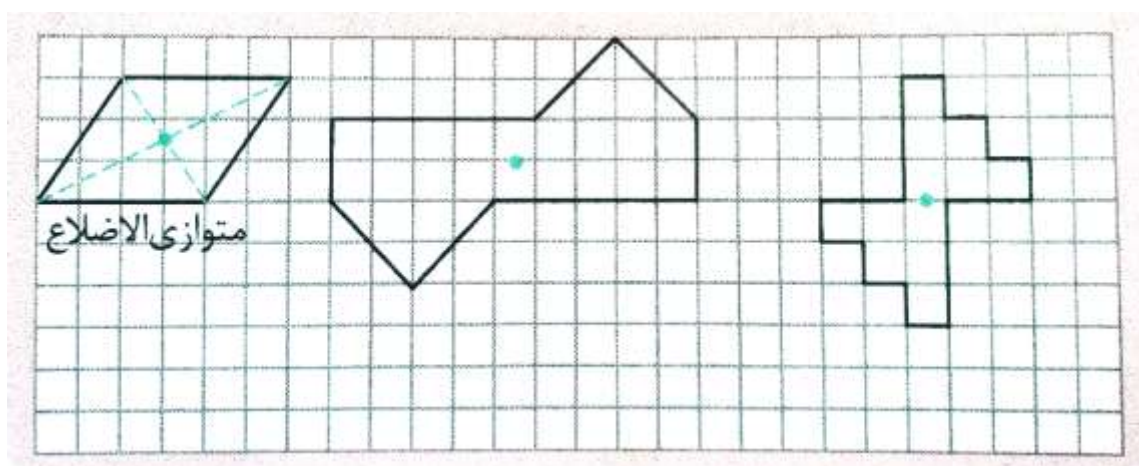


پاسخ: نقطه ی «ب» را به قرینه اش یعنی نقطه ی «پ» و نقطه ی «د» را به قرینه اش یعنی نقطه ی «ذ» وصل می کنیم. محل برخورد دو پاره خط مرکز تقارن است.



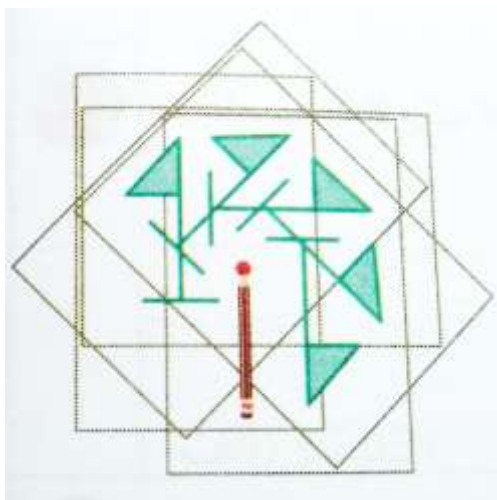
نکته: اگر شکلی دارای دو خط تقارن (محور تقارن) عمود برهم باشد، نقطه ی برخورد دو خط تقارن، مرکز تقارن شکل است.

نکته: بعضی از شکل ها، خط تقارن (محور تقارن) ندارند، اما مرکز تقارن دارند. برای مثال شکل های زیر محور تقارن ندارند اما مرکز تقارن دارند.



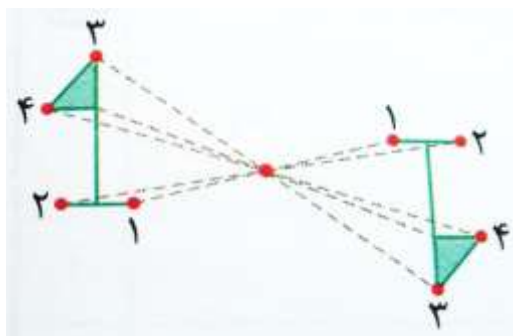
مرکز تقارن و تقارن مرکزی ۲

در سال گذشته با تقارن مرکزی آشنا شدید و آموختید که اگر بخواهیم قرینه ی نقطه ای مانند «آ» را نسبت به نقطه ی «م» به دست آوریم، ابتدا به وسیله ی خط کش این دو نقطه را به هم وصل می کنیم و در طرف دیگر به همان اندازه ادامه می دهیم تا به قرینه ی «آ» برسیم. اگر بخواهیم قرینه ی یک شکل را نسبت به یک نقطه رسم کنیم، می توانیم از روش های زیر استفاده کنیم:

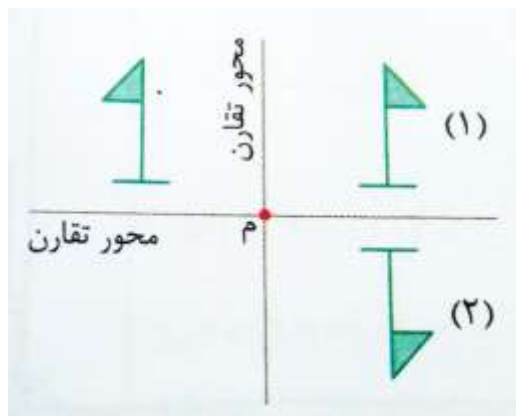


۱- استفاده از کاغذ شفاف: در این روش ابتدا کاغذ شفاف را روی شکل مورد نظر قرار داده و آن شکل را رسم می کنیم، سپس نوک مداد را روی نقطه ای که می خواهیم قرینه ی شکل را نسبت به آن رسم کنیم، می گذاریم و کاغذ شفاف را ۱۸۰ درجه (نیم دور) حول آن نقطه می چرخانیم. به این ترتیب قرینه ی شکل نسبت به نقطه رسم می شود.

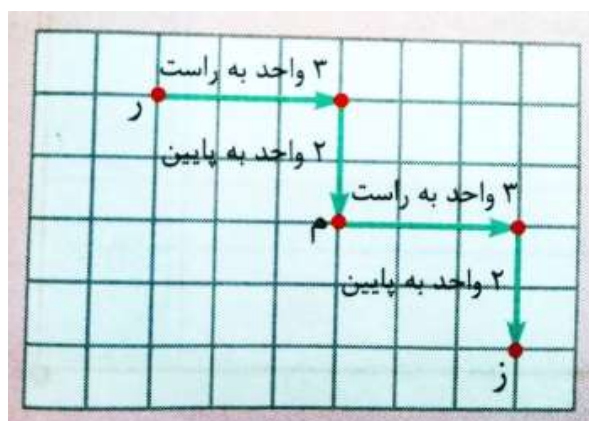
مورد نظر وصل کنیم و در طرف دیگر آن نقطه به همان اندازه امتداد دهیم.



۲- جابه جایی نقاط شکل: برای رسم قرینه ی یک شکل نسبت به یک نقطه، ابتدا قرینه ی رأس های آن شکل را نسبت به نقطه ی مورد نظر مشخص می کنیم، سپس نقاط به دست آمده را مانند شکل اصلی به یک دیگر وصل می کنیم. برای مشخص کردن قرینه ی هر رأس کافی است که آن رأس را به وسیله خط کش به نقطه ی



۳- استفاده از محور تقارن: ابتدا روی نقطه ی مورد نظر یک محور افقی و یک محور عمودی رسم می کنیم، سپس قرینه ی شکل را ابتدا نسبت به محور عمودی رسم می کنیم تا شکل (۱) به دست آید و بعد قرینه ی شکل (۱) را نسبت به محور افقی رسم می کنیم تا شکل (۲) که همان قرینه ی شکل اصلی نسبت به نقطه ی «م» می باشد، به دست آید.



۴- انتقال نقاط روی صفحه ی شطرنجی: در این روش باید جابه جایی هر رأس را تا نقطه ی مورد نظر، ابتدا به صورت افقی و سپس عمودی بررسی کنیم، سپس از آن نقطه مجدداً به همان جهت قبلی ابتدا افقی و سپس عمودی حرکت کنیم. به این ترتیب قرینه ی هر رأس نسبت به نقطه ی مورد نظر مشخص می شود.

مرکز تقارن

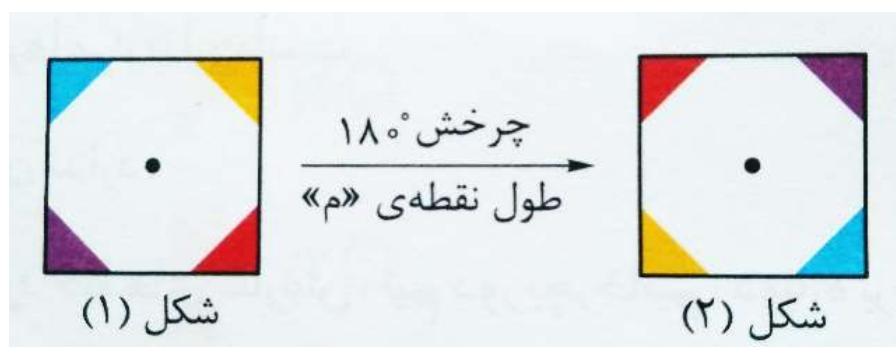
وقتی شکلی به اندازه ی 180° درجه (نیم دور) حول نقطه ای بچرخد و روی خودش منطبق شود، می گوییم شکل مرکز تقارن دارد. با توجه به شکل های زیر که در آن ها، هر شکل را 180° درجه حول نقطه ی مشخص شده دوران داده ایم، نتیجه می شود که مربع، مستطیل و متوازی الاضلاع دارای مرکز تقارن هستند، اما مثلث و دوزنقه مرکز تقارن ندارند.



نکته: در متوازی الاضلاع، مربع، مستطیل و لوزی، محل برخورد قطرهای همان مرکز تقارن است.

دقت داشته باشید اگر شکل زیر را 180° درجه حول نقطه ی «م» بچرخانیم، با توجه به این که رنگ های شکل اصلی جابه جا می شوند، پس نقطه ی «م» نمی تواند مرکز تقارن شکل باشد.

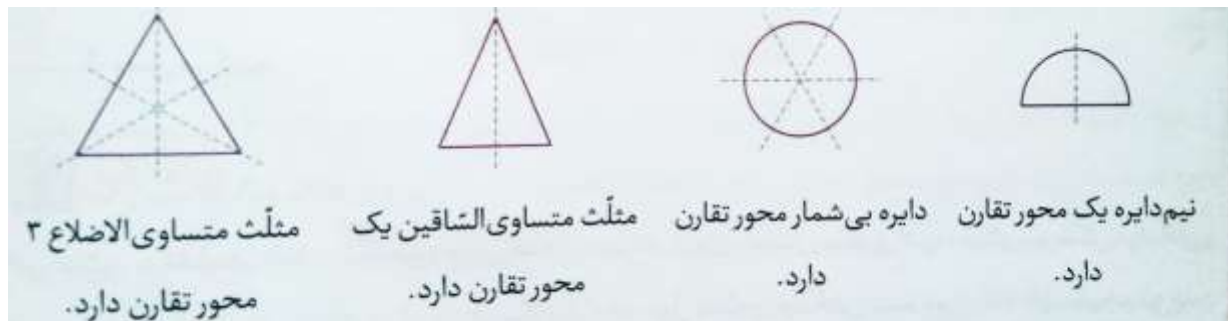
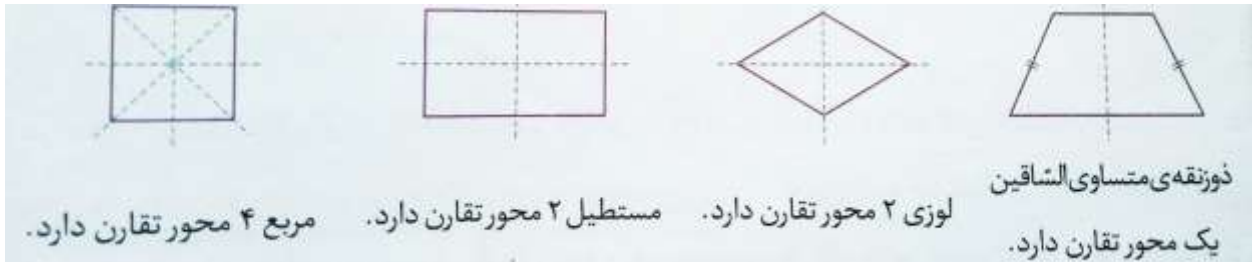
چون رنگ های شکل (۲) بر شکل (۱) منطبق نمی شوند، این شکل مرکز تقارن ندارد.



یادآوری محور تقارن

محور تقارن خطی است که شکل را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند، به طوری که اگر شکل را از روی آن خط تا کنیم، آن دو قسمت کاملاً بر هم منطبق شوند.

به خط تقارن هر شکل دقت کنید:



نکته: متوازی الاضلاع، مثلث مختلف الاضلاع و تمامی دوزنقه ها، به غیر از دوزنقه متساوی الساقین، محور تقارن ندارند.

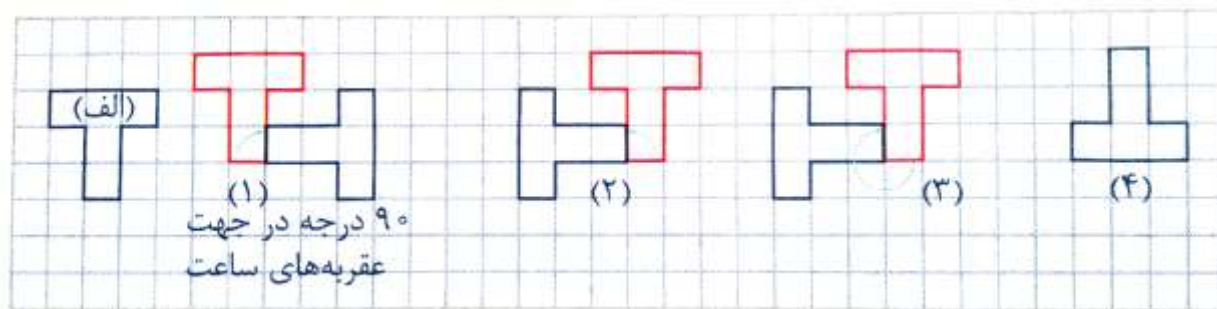
درس دوم – دوران

نکته: در دوران (چرخش) غیر از 180° درجه و 360° درجه، حتماً باید جهت دوران مشخص شود که در جهت عقربه های ساعت است و یا در خلاف جهت عقربه های ساعت.

مثال: در صفحه ی شطرنجی زیر، شکل «الف» را با دوران ها مشخص شده ی زیر رسم کنید.

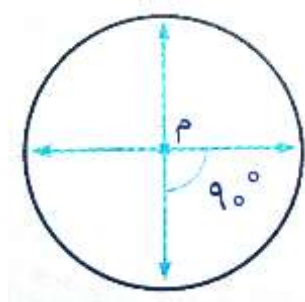
- ۱- 90° درجه در جهت عقربه های ساعت
- ۲- 90° درجه در جهت خلاف عقربه های ساعت
- ۳- 270° درجه در جهت عقربه های ساعت
- ۴- 180° درجه

پاسخ:

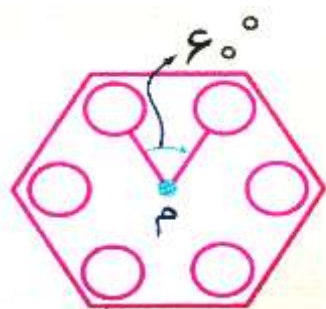


نکته: دوران ۲۷۰ درجه در جهت عقربه‌های ساعت، با دوران ۹۰ درجه در جهت خلاف عقربه‌های ساعت یکسان است.

نکته: اگر شکلی را حول یک نقطه به اندازه ۱۸۰ درجه یا کم تر بچرخانیم و شکل روی خودش قرار گیرد، می‌گوییم شکل دارای تقارن چرخشی است.



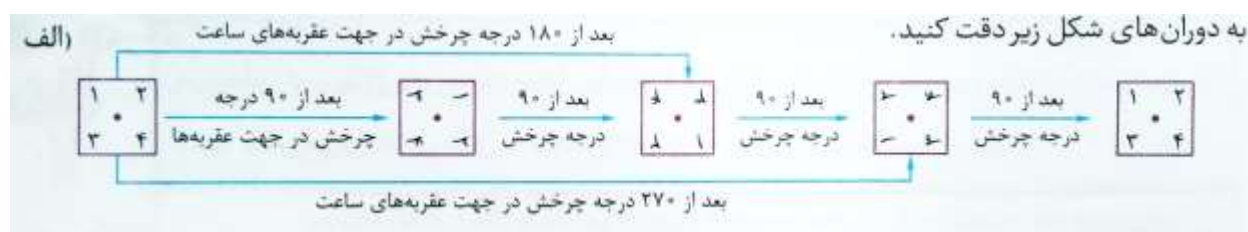
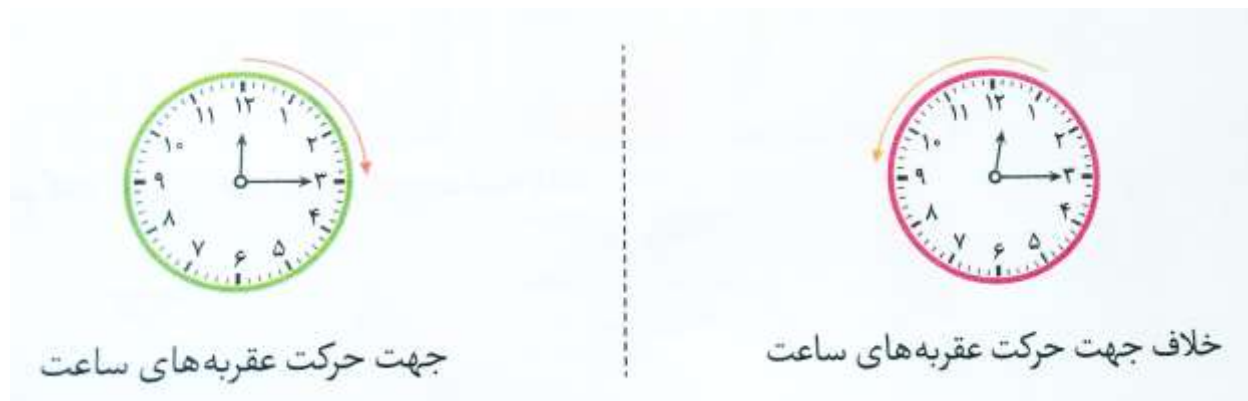
مثال: شکل مقابل تقارن چرخشی دارد، زیرا با دوران ۹۰ درجه حول نقطه ی «م»، روی خودش قرار می‌گیرد.



مثال: شکل مقابل نیز دارای تقارن چرخشی است، زیرا با دوران ۶۰ درجه حول نقطه ی «م»، روی خودش قرار می‌گیرد.

دوران ۲

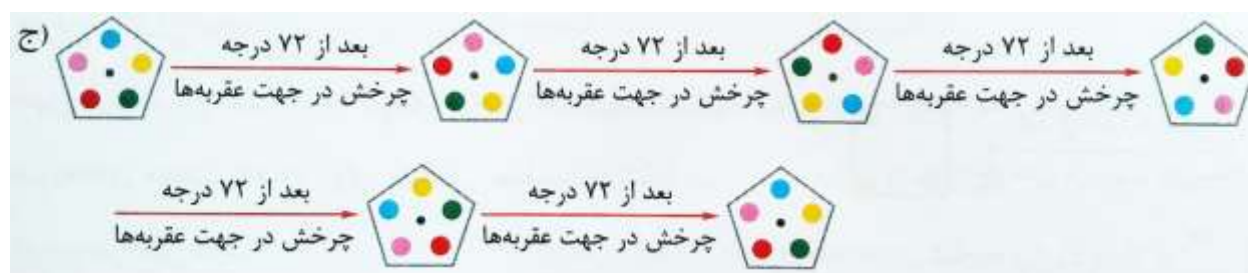
در سال قبل با مفهوم چرخش یا همان دوران آشنا شدید. در هر چرخش، مرکز دوران، زاویه و جهت چرخش اهمیت زیادی دارد. در دوران دو جهت زیر مهم هستند:



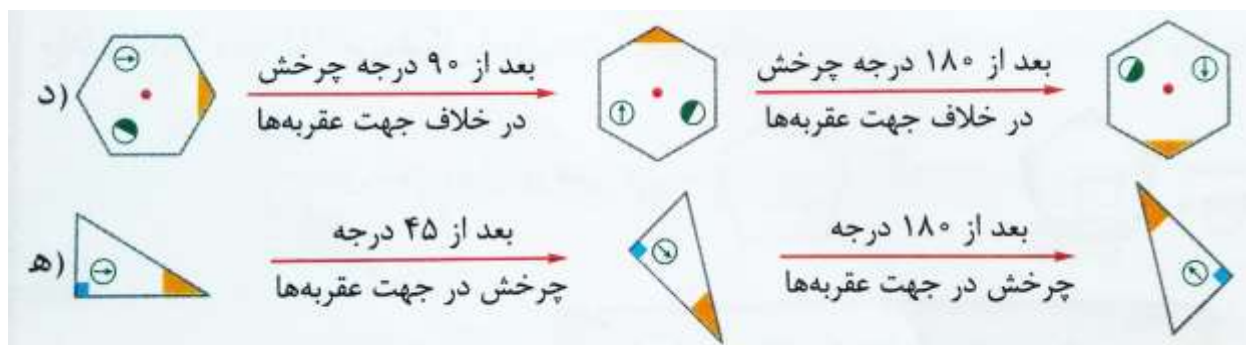
همان طور که ملاحظه می‌کنید، این شکل با ۴ چرخش یا همان 360° درجه چرخش به موقعیت اولیه ی خود برگشت.



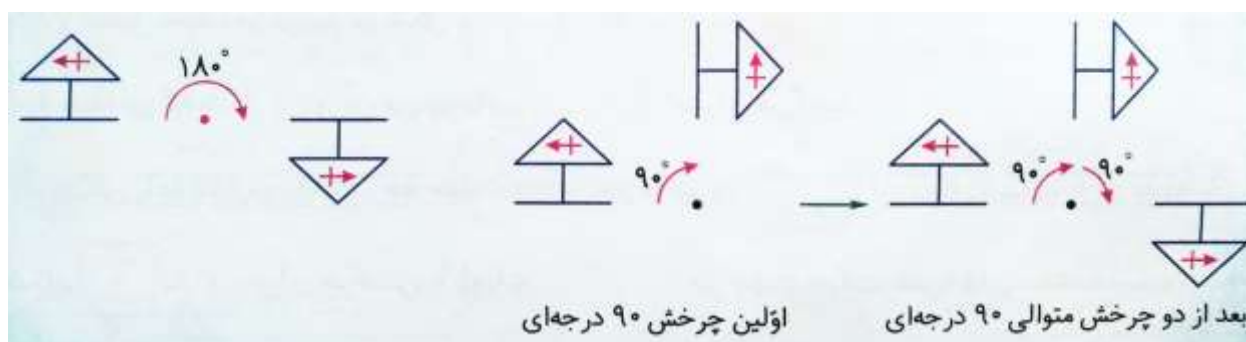
همان طور که ملاحظه می‌کنید، این شکل هم با ۴ چرخش یا همان 360° درجه چرخش به موقعیت اولیه خود برگشت.



همان طور که ملاحظه می کنید، این شکل پس از ۵ چرخش یا همان ۳۶۰ درجه چرخش به موقعیت اولیه ی خود بازگشت.



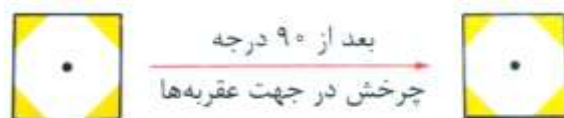
نکته: اگر هر شکلی را ۱۸۰ درجه در جهت یا خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت حول نقطه ای بچرخانیم، قرینه ی آن شکل نسبت به آن نقطه به دست می آید. البته می توانیم به جای یک چرخش مستقیم ۱۸۰ درجه ای، از دو چرخش متوالی ۹۰ درجه ای استفاده کنیم.



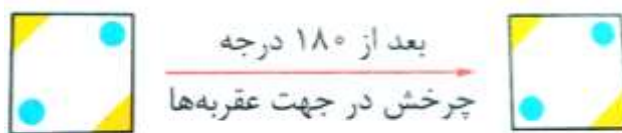
نکته: همان طور که در شکل های صفحه ی قبل ملاحظه کردید، اگر شکل اولیه را نسبت به نقطه ی داده شده قرینه کنیم، همان دوران یافته ی شکل به اندازه ی ۱۸۰ درجه حول آن نقطه به دست می آید.

تقارن چرخشی

وقتی شکلی را حول یک نقطه به اندازه 180° درجه یا کم تر در جهت حرکت عقربه های ساعت بچرخانیم و شکل روی خودش منطبق شود، می گوییم شکل، تقارن چرخشی دارد. به شکل های زیر دقت کنید:



چون این شکل بعد از 90° درجه چرخش در جهت حرکت عقربه های ساعت دوباره روی خودش منطبق می شود، پس دوران چرخشی دارد.

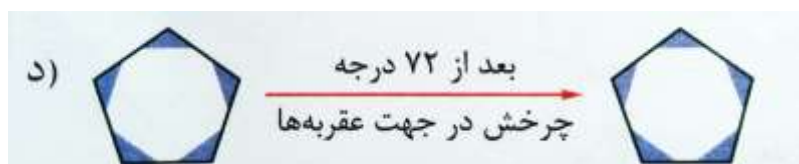


چون این شکل بعد از 180° درجه چرخش در جهت حرکت عقربه های ساعت دوباره روی خودش منطبق می شود پس دوران چرخشی دارد.

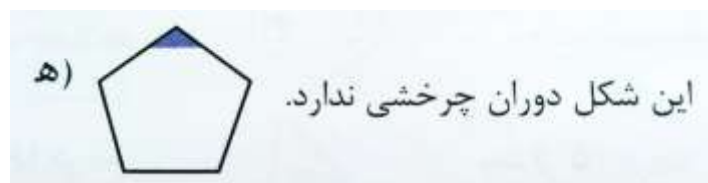
اگر شکل مقابل را از ۱ تا 180° درجه بچرخانیم، هیچ گاه بر خودش منطبق نمی شود لذا این شکل دوران چرخشی ندارد.



شکل زیر تقارن چرخشی دارد.



شکل زیر تقارن چرخشی ندارد.



درس سوم - محورهای مختصات

صفحه ی مختصات از دو محور عمودی و افقی تشکیل شده است که به محور افقی، محور طول و به محور عمودی، محور عرض می گویند. با توجه به تقسیم بندی روی این دو محور، مکان هر نقطه روی صفحه را می توانیم تعیین کنیم که به آن مختصات نقطه می گویند.

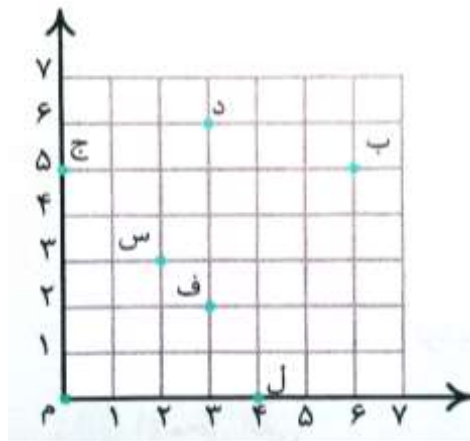


مختصات نقطه را به صورت $\begin{bmatrix} \text{مؤلفه ی عمودی (عرض) نقطه می گویند.} \\ \text{نمایش می دهیم که عدد} \end{bmatrix}$ را مؤلفه ی افقی (طول) نقطه و عدد



نکته: مؤلفه ی افقی در بالا و مؤلفه ی عمودی باید در پایین مختصات یک نقطه نوشته شود.

مثال: مختصات نقطه های زیر را با استفاده از صفحه ی مختصات مقابل بنویسید.

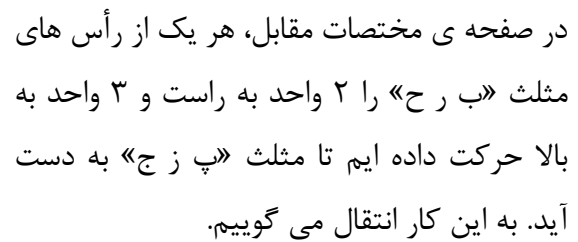


$$\begin{array}{ccc} \text{ب} = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix} & \text{ف} = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix} & \text{د} = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix} \\ \text{س} = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix} & \text{ج} = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix} & \text{ل} = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix} \end{array}$$

پاسخ:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{مؤلفه ی افقی} & & & & & & \\ \text{س} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} & \text{ج} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} & \text{ل} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} & \text{ب} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix} & \text{ف} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} & \text{د} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} & \\ & \text{مؤلفه ی عمودی} & & & & & \end{array}$$

نکته: نقطه ی «م» که ابتدا مشترک دو محور است، دارای مختصات $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ است و مختصات هر نقطه در صفحه ی مختصات، نسبت به این نقطه حساب می شود.



در صفحه ی مختصات مقابل، مختصات سه رأس
 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ = ک و $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ = ف از مثلث
 «ف د ک» را سه برابر کرده ایم و به ترتیب رأس
 های $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ = ذ، $\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$ = گ و $\begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}$ = ق از مثلث
 «ق ذ گ» به دست آمده است. چون مختصات سه
 برابر شده اند، پس محیط مثلث «ق ذ گ» سه برابر
 محیط مثلث «ف د ک» و مساحت آن 3×3 یعنی
 ۹ برابر مساحت «ف د ک» است.

ما معمولاً در زندگی روزمره از نقشه ها در پیدا کردن موقعیت ها و مکان هایی که شناخت کافی از آن ها نداریم، استفاده می کنیم. هر نقطه روی نقشه با عددی مشخص می شود که در اصطلاح «مختصات» آن نقطه می گوئیم.

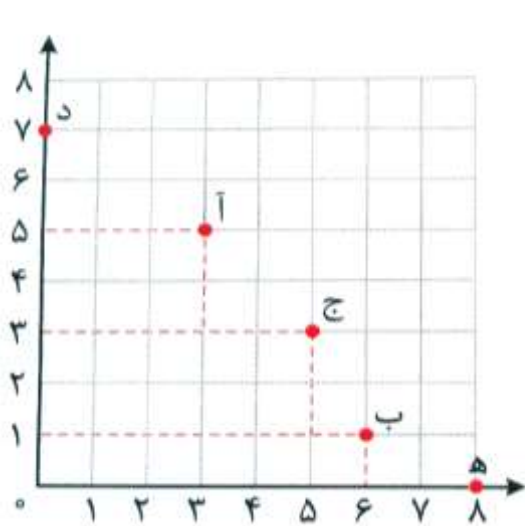
نقطه در صفحه ی مختصات

مکان همه ی نقطه های موجود در یک صفحه را می توانیم به کمک دو محور عمود برهم که در اصطلاح «محور مختصات» گفته می شود، مشخص کنیم. صفحه ی مختصات از دو محور عمود برهم که یکی از آن ها محور افقی (طول ها) و دیگری محور عمودی (عرض ها) می باشد، تشکیل شده است. هر دو در نقطه ی صفر (مبدأ) مشترک هستند. به دو عددی که با آن مکان نقطه را در صفحه تعیین می کنیم، مختصات آن نقطه

می گوئیم و مختصات نقطه را به صورت $\begin{bmatrix} \text{طول نقطه} \\ \text{عرض نقطه} \end{bmatrix}$ نشان می دهیم.

در صفحه ی مختصات زیر، اگر از نقطه ی «آ» بر محورهای طول و عرض عمود کنیم، به این ترتیب طول نقطه ی «آ» برابر ۳ و عرض آن برابر ۵ می باشد.

لذا مختصات این نقطه را به صورت $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ می نویسیم و می خوانیم نقطه ی «آ» به طول و عرض ۵. همچنین مختصات نقاط دیگر هم برابر است با:



$$ج = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$ب = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$د = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$ه = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

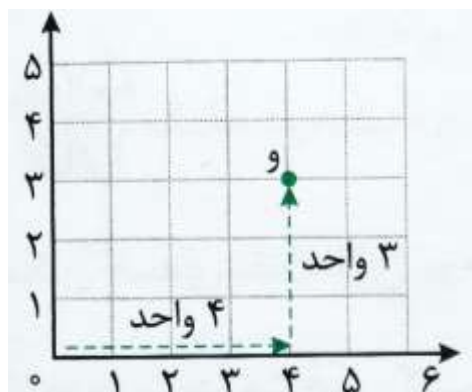
همان طور که ملاحظه می کنید، با توجه به نقاط $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ ، با جابه جا شدن طول و عرض هر نقطه، جای نقطه در صفحه و در نتیجه مختصات آن تغییر می کند.

نقطه ی $\begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}$ روی محور افقی یا همان محور طول ها قرار دارد. از طرفی عرض این نقطه برابر صفر است. پس هر نقطه که روی محور طول ها قرار داشته باشد، عرضش صفر است.

نقطه ی $\begin{bmatrix} 0 \\ 7 \end{bmatrix}$ روی محور عمودی یا همان محور عرض ها قرار دارد. از طرفی طول این نقطه برابر صفر است پس هر نقطه که روی محور عرض ها قرار داشته باشد، طولش صفر است.

روش دوم برای تعیین مختصات نقاط

برای تعیین مختصات هر نقطه، می‌توانیم از مبدأ مختصات شروع به حرکت افقی و سپس حرکت عمودی کنیم تا به نقطه‌ی مورد نظر برسیم. سپس در قسمت بالایی مختصات، باید مقدار حرکت در جهت افقی و در قسمت پایین آن هم مقدار حرکت در جهت عمودی را بنویسیم.

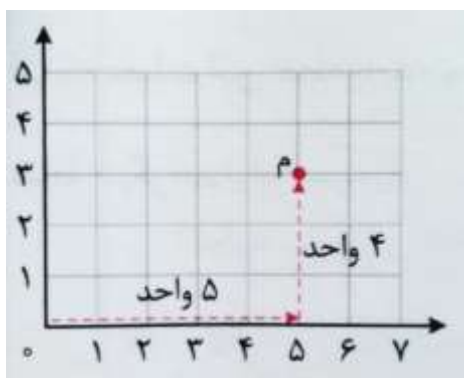


در صفحه‌ی مختصات مقابل، اگر از مبدأ ۴ واحد به سمت راست و سپس ۳ واحد به سمت بالا حرکت کنیم به نقطه‌ی «و» می‌رسیم. پس مختصات نقطه‌ی «و» برابر $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ = و می‌باشد.

نمایش نقطه در صفحه‌ی مختصات

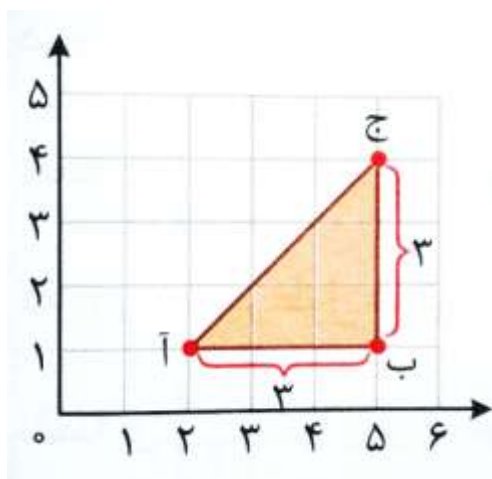
برای نمایش نقطه‌ای که مختصات آن معلوم است، کافی است که از مبدأ مختصات ابتدا به اندازه‌ی عدد داده شده برای طول به صورت افقی و پس از آن به اندازه‌ی عدد داده شده برای عرض، به صورت عمودی حرکت کنیم تا به نقطه‌ی مورد نظر برسیم.

برای نمایش نقطه‌ی $\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ = م کافی است که از مبدأ ابتدا به اندازه‌ی ۵ واحد به صورت افقی و به سمت راست و پس از آن به اندازه‌ی ۴ واحد به صورت عمودی و به سمت بالا حرکت کنیم تا به نقطه‌ی «م» برسیم.



رسم شکل های هندسی در صفحه مختصات

اگر مختصات رأس های یک شکل هندسی معلوم باشد، می توانیم این رأس ها را در صفحه ی مختصات به طور دقیق مشخص نماییم، سپس آن نقاط را به وسیله ی خط کش به یک دیگر وصل می کنیم تا شکل مورد نظر رسم شود. حالا با شمردن تعداد مربع های داخل شکل یا استفاده از فرمول های محاسبه ی مساحت، می توانیم مساحت شکل مورد نظر را تعیین کنیم.



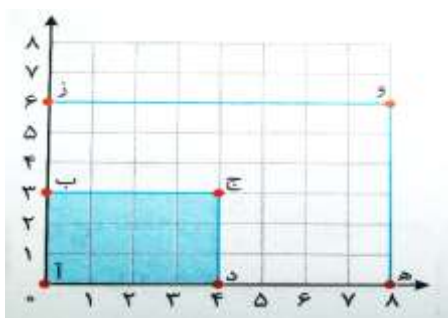
مثال ۱: نقاط $\bar{A} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $\bar{B} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $\bar{C} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ رأس های یک مثلث هستند. ابتدا مثلث را رسم کرده، سپس مساحت آن را حساب کنید.

ابتدا نقاط بالا را به طور دقیق روی صفحه ی مختصات مشخص، و آن ها را به یک دیگر وصل می کنیم تا مثلث «آ ب ج» به دست آید. همان طور که ملاحظه می کنید، این مثلث قائم الزاویه است، پس مساحت آن برابر است با:

$$\text{مساحت مثلث} = (\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}) \div 2 = (3 \times 3) \div 2 = 4.5$$

بزرگ نمایی شکل ها در صفحه مختصات

به مختصات رأس های دو مستطیل «آ ب ج د» و «آ ز و ه» دقت کنید.



مستطیل «آ ب ج د»:

مستطیل «آ ز و ه»:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{Z} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{W} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

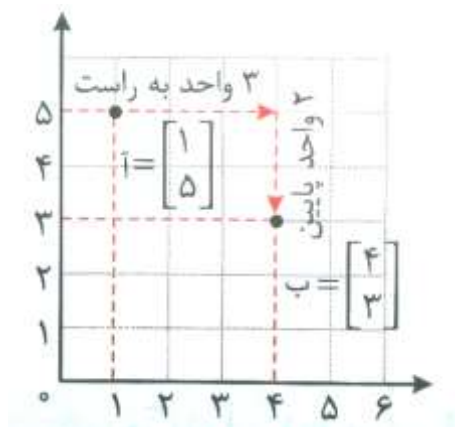
همان طور که ملاحظه می کنید، ابعاد مستطیل بزرگ تر دو برابر ابعاد مستطیل کوچک تر است، اما مساحت آن ۴ برابر مساحت مستطیل کوچک تر می باشد.

$$\text{بزرگ } 12 = 4 \times 3 = \text{مساحت مستطیل کوچک تر}$$

$$48 = 8 \times 6 = \text{مساحت مستطیل}$$

نکته: اگر مختصات رأس های یک شکل را در عددی مانند «آ» ضرب کنیم، به این ترتیب باید هم طول و هم عرض تمامی نقاط شکل را در عدد «آ» ضرب کنیم. در این صورت شکلی به وجود می آید که شبیه شکل اولیه است، اما مساحت آن («آ» × «آ») برابر مساحت شکل اولیه خواهد شد.

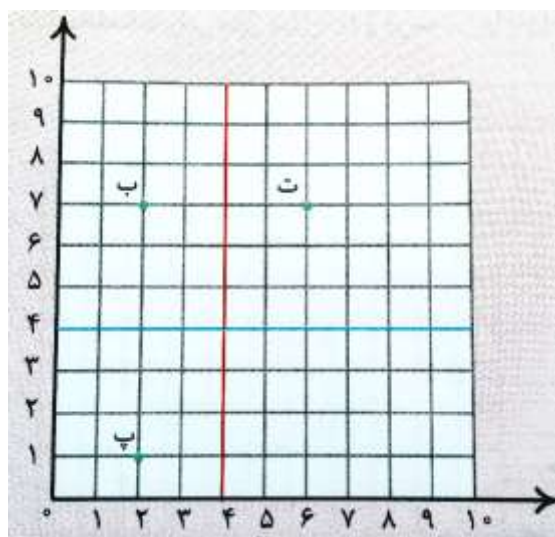
انتقال شکل در صفحه ی مختصات



اگر در صفحه ی مختصات نقطه ای را جابه جا کنیم، یک انتقال انجام داده ایم. به طور مثال اگر از نقطه ای مانند $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ سه واحد به سمت راست و سپس دو واحد به سمت پایین حرکت کنیم، به نقطه ی $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ می رسیم به این ترتیب می گوییم که نقطه ی «آ» را به نقطه ی «ب» منتقل کرده ایم.

نکته: برای انتقال یک شکل در صفحه ی مختصات، کافی است که ابتدا تمامی رأس ها را به اندازه ی خواسته شده انتقال دهیم، سپس نقاط به دست آمده را مانند شکل اولیه به یک دیگر وصل کنیم. به این ترتیب شکلی به دست می آید که با شکل اولیه مساوی است، ولی در صفحه جابه جا شده است.

درس چهارم: تقارن و مختصات



مثال: قرینه ی نقطه ی $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$ نسبت به خط تقارن قرمز، نقطه ی $B' = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix}$ است و قرینه ی نقطه ی «ب» نسبت به خط تقارن آبی، نقطه ی $P = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ است.

دو نقطه ی «ب» و «ت» دارای مؤلفه های عمودی برابرند.

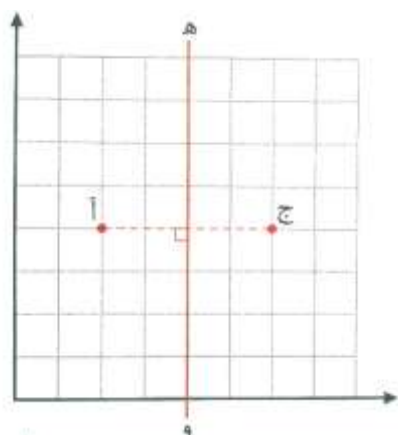
دو نقطه ی «ب» و «پ» دارای مؤلفه های افقی برابرند.

نکته: مؤلفه ی عمودی (عرض) هر نقطه و قرینه اش نسبت به یک خط عمودی با هم برابرند. مؤلفه ی افقی (طول) هر نقطه و قرینه اش نسبت به یک خط افقی با هم برابرند.

تقارن و مختصات ۲

قرینه ی یک نقطه نسبت به خط تقارن عمودی

می دانیم که برای مشخص کردن قرینه ی یک نقطه نسبت به یک خط تقارن، کافی است که از آن نقطه بر خط تقارن عمود کنیم و در طرف دیگر خط به همان اندازه پیش برویم. در شکل مقابل، نقطه ی $ج = \begin{bmatrix} ۶ \\ ۴ \end{bmatrix}$ قرینه ی نقطه ی $آ = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۴ \end{bmatrix}$ نسبت به خط تقارن «ه» و «و» است. همان طور که ملاحظه می کنید، عرض این دو نقطه با هم برابر است و خط تقارن دقیقاً از نقاطی به طول ۴ (میانگین ۲ و ۶) عبور می کند.



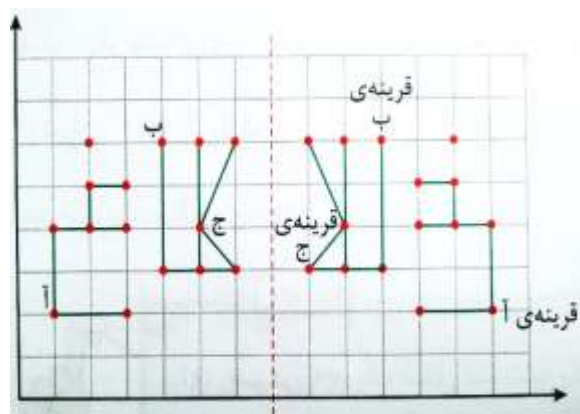
نکته:

۱- در دو نقطه که نسبت به یک خط تقارن عمودی با هم قرینه هستند، عرض ها برابر بوده ولی طول ها متفاوت است.

۲- برای رسم قرینه ی یک شکل نسبت به خط تقارن عمودی، کافی است که قرینه ی هر رأس را نسبت به خط تقارن مشخص نموده، سپس نقاط به دست آمده را مانند خود شکل به هم وصل کنیم.

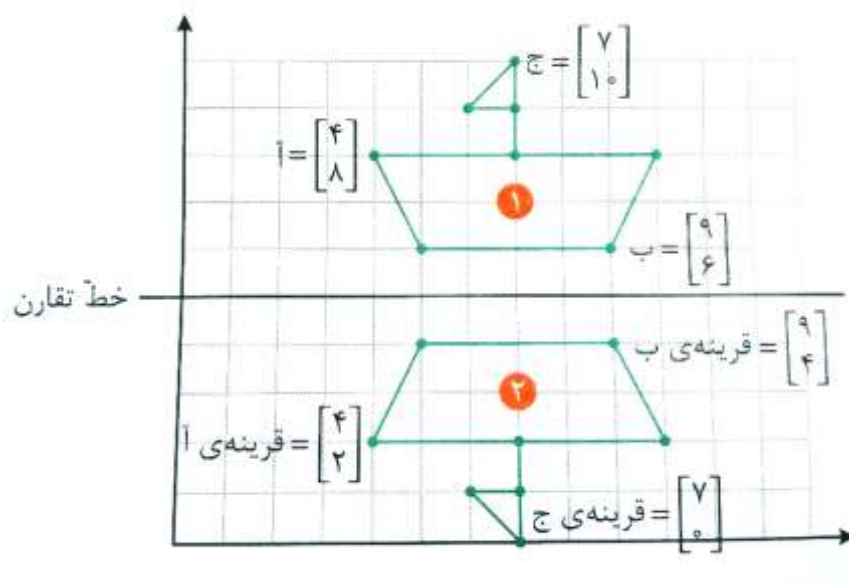
در شکل زیر، به مختصات نقاط «آ»، «ب» و «ج» و قرینه ی آن ها نسبت به خط تقارن عمودی دقت کنید.

$$\begin{aligned} \text{آ} &= \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} & \text{قرینه ی آ} &= \begin{bmatrix} ۱۳ \\ ۲ \end{bmatrix} \\ \text{ب} &= \begin{bmatrix} ۴ \\ ۶ \end{bmatrix} & \text{قرینه ی ب} &= \begin{bmatrix} ۱۰ \\ ۶ \end{bmatrix} \\ \text{ج} &= \begin{bmatrix} ۵ \\ ۴ \end{bmatrix} & \text{قرینه ی ج} &= \begin{bmatrix} ۹ \\ ۴ \end{bmatrix} \end{aligned}$$



قرینه ی یک نقطه نسبت به خط تقارن افقی

در محور مختصات زیر، شکل ۲، قرینه ی شکل ۱ نسبت به خط تقارن افقی است. همان طور که ملاحظه می کنید طول هر نقطه و قرینه ی آن نسبت به خط تقارن با هم برابر است.



$$\begin{aligned} \vec{A} &= \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} \\ \vec{B} &= \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix} \\ \vec{C} &= \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

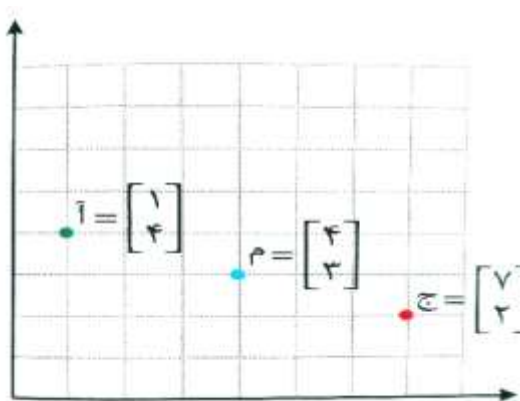
$$\begin{aligned} \text{قرینه ی } \vec{A} &= \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \text{قرینه ی } \vec{B} &= \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix} \\ \text{قرینه ی } \vec{C} &= \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

نکته: در دو نقطه که نسبت به یک خط تقارن افقی قرینه هستند، طول ها برابر، ولی عرض ها متفاوت هستند.

قرینه ی یک نقطه نسبت به یک نقطه در صفحه مختصات

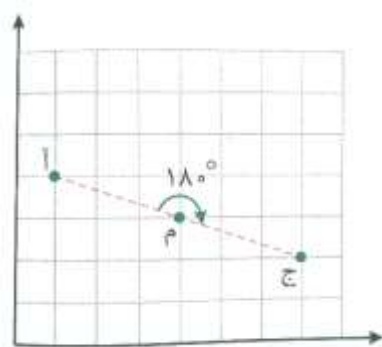
برای پیدا کردن قرینه ی یک نقطه نسبت به نقطه ی دیگر در صفحه ی مختصات، می توانیم از روش های زیر استفاده کنیم.

پایین حرکت می کنیم تا به نقطه ی $ج = \begin{bmatrix} ۷ \\ ۲ \end{bmatrix}$ برسیم.



۱- جابه جایی: برای جابه جا شدن از نقطه ی $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۴ \end{bmatrix}$ به نقطه ی $\begin{bmatrix} ۴ \\ ۳ \end{bmatrix}$ ، ابتدا باید به صورت افقی و به سمت راست ۳ واحد، سپس به صورت عمودی و به سمت پایین یک واحد حرکت کنیم. حالا برای پیدا کردن قرینه ی «آ» نسبت به نقطه ی «م»، همین عمل را انجام می دهیم، یعنی از نقطه ی (م) ابتدا ۳ واحد افقی به سمت راست و سپس یک واحد عمودی به سمت

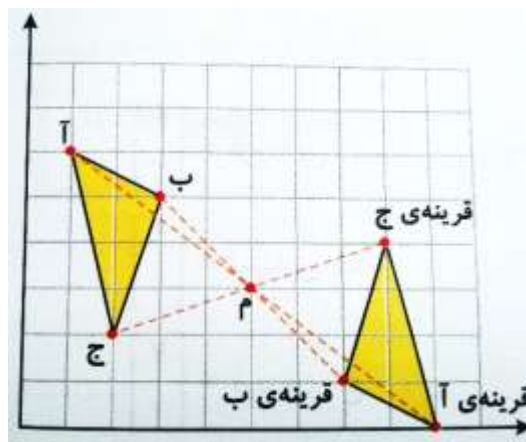
۲- تقارن مرکزی: از نقطه ی «آ» به نقطه ی «م» وصل می کنیم و به همان اندازه در طرف دیگر نقطه ی «م» پیش می رویم تا به نقطه ی «ج» برسیم.



۳- دوران ۱۸۰ درجه: اگر نقطه ی «آ» را به اندازه ی ۱۸۰ درجه نسبت به نقطه ی «م» دوران دهیم (بچرخانیم)، به نقطه ی «ج» می رسیم.

نکته: برای رسم قرینه ی یک شکل نسبت به یک نقطه، ابتدا باید قرینه ی تمامی رأس های شکل را با استفاده از یکی از روش های بالا (روش تقارن مرکزی، ساده تر است.) نسبت به نقطه ی داده شده مشخص کنیم. سپس نقاط مشخص شده را مانند شکل اصلی به یک دیگر وصل کنیم.

مثال ۱: قرینه ی مثلث مقابل را نسبت به مرکز تقارن «م»، رسم کنید، سپس مختصات رأس های قرینه ی آن را بنویسید.



روش اول: ابتدا با استفاده از تقارن مرکزی، قرینه ی هر یک از نقاط «آ»، «ب» و «ج» را نسبت به نقطه ی «م» مشخص می کنیم، سپس مختصات آن ها را می نویسیم.

$$\begin{array}{lll} \text{آ} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} & \text{ب} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} & \text{ج} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \text{قرینه ی «آ»} = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \end{bmatrix} & \text{قرینه ی «ب»} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} & \text{قرینه ی «ج»} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

روش دوم: استفاده از جابه جایی

$$\begin{array}{l} \text{قرینه ی نقطه ی آ} = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{واحد عمودی به پایین ۳ واحد افقی به راست ۴}]{\text{مرکز تقارن}} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{واحد عمودی به پایین ۳ واحد افقی به راست ۴}]{\text{مرکز تقارن}} \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \text{قرینه ی نقطه ی ب} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{واحد عمودی به پایین ۲ واحد افقی به راست ۲}]{\text{مرکز تقارن}} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{واحد عمودی به پایین ۲ واحد افقی به راست ۲}]{\text{مرکز تقارن}} \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \text{قرینه ی نقطه ی ج} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{واحد عمودی به پایین ۱ واحد افقی به راست ۳}]{\text{مرکز تقارن}} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{واحد عمودی به پایین ۱ واحد افقی به راست ۳}]{\text{مرکز تقارن}} \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

حالا نقاط به دست آمده را در محور مختصات مشخص، و مثل شکل اصلی به یک دیگر وصل می کنیم تا شکل مانند شکل روش قبل شود.

مریم عزیزی

فصل پنجم - اندازه گیری

درس اول - طول و سطح

می دانیم که برای اندازه گیری مقداری از هر چیز، نیاز به واحد داریم. برای مثال برای اندازه گیری قد یک انسان از واحد متر یا سانتی متر و برای اندازه گیری سنگینی یک جسم، از واحد گرم یا کیلوگرم استفاده می کنیم. معنی کلمات زیر را یاد بگیرید:

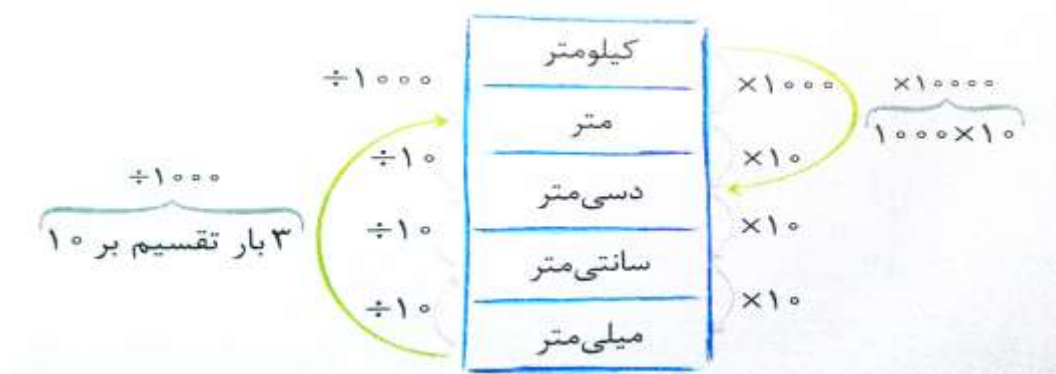
- کیلو یعنی هزار؛ مثال: کیلوگرم یعنی هزار گرم - کیلومتر یعنی هزار متر.
- دسی یعنی یک دهم؛ مثال: دسی متر یعنی یک دهم متر.
- سانتی یعنی یک صدم؛ مثال: سانتی متر یعنی یک صدم متر.
- میلی یعنی یک هزارم؛ مثال: میلی متر یعنی یک هزارم متر - میلی گرم یعنی یک هزارم گرم - میلی لیتر یعنی یک هزارم لیتر که معادل یک سی سی یا یک سانتی متر مکعب است.

در جدول زیر واحدهایی را که به طور معمول از آن ها استفاده می کنیم، بیان شده است.

واحد اندازه گیری (از کوچک به بزرگ)	
طول	میلی متر - سانتی متر - دسی متر - متر - کیلومتر
سطح (مساحت)	میلی متر مربع - سانتی متر مربع - دسی متر مربع - متر مربع - هکتار - کیلومتر مربع
محجم	میلی لیتر (سانتی متر مکعب یا سی سی) - لیتر (دسی متر مکعب) - متر مکعب
جرم	گرم - کیلوگرم - تُن
زاویه	درجه
زمان	ثانیه - دقیقه - ساعت - روز - هفته - ماه - سال - قرن

تبدیل واحدهای طول

با استفاده از جدول زیر به راحتی می توان واحدهای طول را تبدیل کرد.



مثال: $\frac{3}{4}$ متر، چند سانتی متر است؟

پاسخ: با استفاده از جدول می دانیم که هر متر ۱۰۰ سانتی متر است و برای تبدیل از واحد بزرگ (متر) به واحد کوچک (سانتی متر) باید از عمل ضرب استفاده کنیم.

$$\text{سانتی متر } 3/4 \times 100 = 340$$

روش دیگر تبدیل واحدها، استفاده از جدول تناسب است:

مثال: ۱۷ متر چند کیلومتر است؟

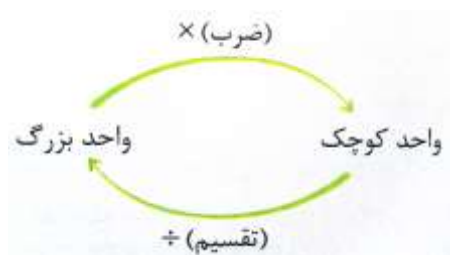
پاسخ:

متر	1000	17
کیلومتر	1	

$17 \div 1000 = 0/017$ کیلومتر

$\text{کیلومتر} = \frac{17 \times 1}{1000} = \frac{17}{1000} = 0/017$

نکته: برای تبدیل واحدها از روش زیر استفاده می کنیم.



پاسخ:

یعنی برای تبدیل واحد بزرگ به واحد کوچک از عمل ضرب و برای تبدیل واحد کوچک به واحد بزرگ از عمل تقسیم استفاده می شود.

مثال: یک کیلومتر چند سانتی متر است؟

کیلومتر $\xrightarrow{\times 1000}$ متر $\xrightarrow{\times 10}$ دسی متر $\xrightarrow{\times 10}$ سانتی متر

$1000 \times 10 \times 10 = 100000$

(واحد کیلومتر از واحد سانتی متر بزرگ تر است.)

یعنی یک کیلومتر ۱۰۰۰۰۰ سانتی متر است.

مثال: ۰/۰۱۶ کیلومتر یعنی چند سانتی متر؟

$$\text{سانتی متر } 0/016 \times 100000 = 1600$$

پاسخ:

واحدهای سطح (مساحت)

می دانیم که مساحت مربع، برابر است با یک ضلع ضرب در خودش.

اگر مربعی به ضلع یک سانتی متر داشته باشیم، مساحت آن برابر است با ۱ سانتی متر مربع.



$$۱ \text{ سانتی متر مربع} = ۱ \text{ سانتی متر} \times ۱ \text{ سانتی متر} = \text{مساحت مربع}$$

اگر مربعی به ضلع یک متر داشته باشیم، مساحت آن برابر است با ۱ متر مربع.

دسی متر مربع $۱۰۰ = ۱۰ \text{ دسی متر} \times ۱۰ \text{ دسی متر} = ۱ \text{ متر} \times ۱ \text{ متر} = ۱ \text{ متر مربع}$

→ دسی متر مربع $۱۰۰ = ۱ \text{ متر مربع}$

سانتی متر مربع $۱۰۰۰۰ = ۱۰۰ \text{ سانتی متر} \times ۱۰۰ \text{ سانتی متر} = ۱ \text{ متر} \times ۱ \text{ متر} = ۱ \text{ متر مربع}$

→ سانتی متر مربع $۱۰۰۰۰ = ۱ \text{ متر مربع}$

میلی متر مربع $۱۰۰۰۰۰۰ = ۱۰۰۰ \text{ میلی متر} \times ۱۰۰۰ \text{ میلی متر} = ۱ \text{ متر} \times ۱ \text{ متر} = ۱ \text{ متر مربع}$

→ میلی متر مربع $۱۰۰۰۰۰۰ = ۱ \text{ متر مربع}$

سانتی متر مربع $۱۰۰ = ۱۰ \text{ سانتی متر} \times ۱۰ \text{ دسی متر} = ۱ \text{ دسی متر} \times ۱ \text{ دسی متر} = ۱ \text{ دسی متر مربع}$

→ سانتی متر مربع $۱۰۰ = ۱ \text{ دسی متر مربع}$

میلی متر مربع $۱۰۰۰۰ = ۱۰۰ \text{ میلی متر} \times ۱۰۰ \text{ دسی متر} = ۱ \text{ دسی متر} \times ۱ \text{ دسی متر} = ۱ \text{ دسی متر مربع}$

→ میلی متر مربع $۱۰۰۰۰ = ۱ \text{ دسی متر مربع}$

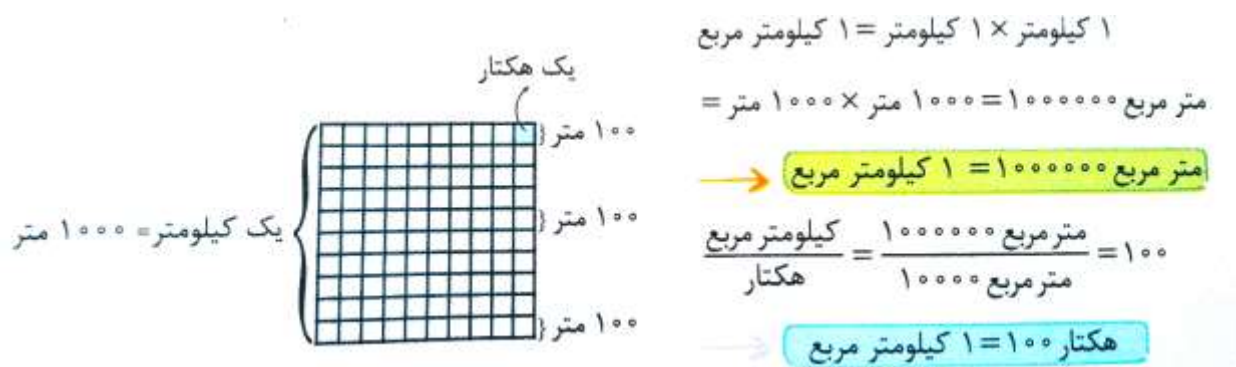
برای اندازه گیری مساحت مزرعه ها، پارک ها و جنگل ها از واحد بزرگ تری به نام هکتار استفاده می شود.

یک هکتار، مساحت مربعی است که اندازه ی هر ضلع آن ۱۰۰ متر است.

$$\text{متر مربع } ۱۰۰۰۰ = ۱ \text{ هکتار} > \text{-----} \text{متر مربع } 10000 = 100 \text{ متر} \times 100 \text{ متر} = 1 \text{ هکتار}$$

برای اندازه گیری سطح های بزرگ تر مانند مساحت شهرها، کشورها، قاره ها و اقیانوس ها از واحد بزرگ تری به نام کیلومتر مربع استفاده می شود. یک کیلومتر مربع، مساحت مربعی است که اندازه ی هر ضلع آن یک کیلومتر یا ۱۰۰۰ متر است.

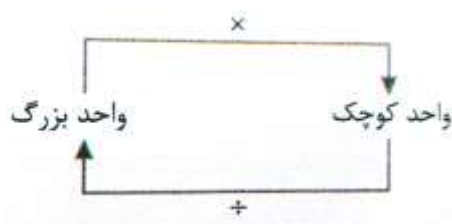
مساحت مربع شکل مقابل یک کیلومتر مربع است و مساحت مربعی که در بالا سمت راست رنگ شده، یک هکتار است.



برای تبدیل واحدها دو روش وجود دارد:

۱- استفاده از ضرب و تقسیم

۲- استفاده از تناسب

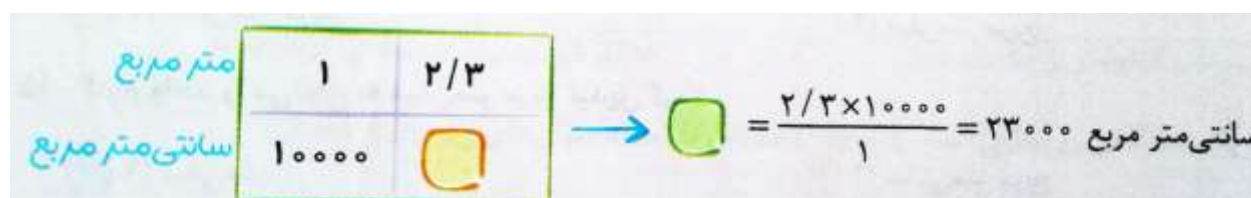


مثال: $\frac{2}{3}$ متر مربع چند سانتی متر مربع است؟

پاسخ: الف) استفاده از ضرب و تقسیم

سانتی متر مربع $23000 = \frac{2}{3} \times 10000$ -----> سانتی متر مربع $10000 = 1$ متر مربع

استفاده از تناسب



طول و سطح ۲

در سال ها قبل با مفهوم اندازه گیری و واحدهای مختلف برای اندازه گیری مواردی از قبیل طول، سطح و حجم و ... آشنا شدید. در این قسمت بعضی از واحدهای اندازه گیری را یادآوری می کنیم:

واحد اندازه گیری طول: کیلومتر - متر - دسی متر - سانتی متر - میلی متر

واحدهای اندازه گیری زمان: سال - ماه - هفته - روز - ساعت - دقیقه - ثانیه

واحدهای اندازه گیری جرم (وزن): تن - کیلوگرم - گرم

واحدهای اندازه گیری سطح: کیلومتر مربع - هکتار - متر مربع - دسی متر مربع - سانتی متر مربع - میلی متر مربع

واحدهای اندازه گیری حجم: متر مکعب - دسی متر مکعب - سانتی متر مکعب

واحدهای اندازه گیری گنجایش: لیتر - میلی لیتر

واحدهای اندازه گیری زاویه: درجه - (البته در کلاس های بالاتر با واحدهای رادیان و گراد هم آشنا می شوید).

همان طور که می دانید برای اندازه گیری در هر یک از موارد بالا باید از واحد مناسب آن استفاده کنیم. به طور مثال برای اندازه گیری طول یک اتاق بهتر است از واحد متر استفاده کنیم اما برای اندازه گیری فاصله ی بین دو شهر بهتر است از واحد کیلومتر و برای اندازه گیری ضخامت یک کتاب از واحد میلی متر استفاده کنیم. بس انتخاب واحد مناسب در اندازه گیری از اهمیت زیادی برخوردار است. حال اگر در انتخاب واحدها دقت نکنیم، مجبوریم از عددهای خیلی بزرگ و یا خیلی کوچک استفاده کنیم. به طور مثال فاصله ی تهران تا مشهد تقریباً ۹۰۰ کیلومتر است، این فاصله با واحد متر برابر ۹۰۰,۰۰۰ متر و با واحد سانتی متر برابر ۹۰,۰۰۰,۰۰۰ سانتی متر است.

تبدیل واحدهای طول

هر کیلومتر، برابر ۱۰۰۰ متر است.
(۱متر) $\times 1000 = 1$ کیلومتر

هر متر، برابر ۱۰ دسی متر است.
(۱دسی متر) $\times 10 = 1$ متر

هر دسی متر، برابر ۱۰ سانتی متر است.
(۱ سانتی متر) $\times 10 = 1$ دسی متر

هر سانتی متر، برابر ۱۰ میلی متر است.
(۱ میلی متر) $\times 10 = 1$ سانتی متر

نکته: پیشنهاد می کنیم که از الگوی زیر برای تبدیل واحدهای طول به یک دیگر استفاده کنید. همچنین می توانید از جدول تناسب هم در تبدیل واحدهای طول به یک دیگر استفاده کنید.



مثال ۱: الف) ۴۳۲ کیلومتر چند متر است؟

می دانیم که هر کیلومتر، برابر ۱۰۰۰ متر است. پس ۴۳۲ کیلومتر، برابر ۴۳۲×۱۰۰۰ یعنی ۴۳۲۰۰۰ متر است.

ب) ۵۲۷ متر چند کیلومتر است؟ می دانیم که هر کیلومتر، برابر ۱۰۰۰ متر است، بنابراین:

متر	۱۰۰۰	۵۲۷
کیلومتر	۱	?

$$\Rightarrow ? = \frac{۱ \times ۵۲۷}{۱۰۰۰} = \frac{۵۲۷}{۱۰۰۰} = ۰/۵۲۷$$

ج) ۵۲۷ دسی متر چند کیلومتر است؟

طبق الگوی بالا هر کیلومتر، برابر ۱۰×۱۰۰۰ یعنی ۱۰۰۰۰ دسی متر است، بنابراین:

کیلومتر	۱	?
دسی متر	۱۰۰۰۰	۵۲۷

$$\Rightarrow ? = \frac{۱ \times ۵۲۷}{۱۰۰۰۰} = \frac{۵۲۷}{۱۰۰۰۰} = ۰/۰۵۲۷$$

د) ۳۷ دسی متر چند میلی متر است؟ طبق الگوی بالا هر دسی متر، برابر ۱۰×۱۰ یعنی ۱۰۰ میلی متر است، پس ۳۷ دسی متر، برابر ۳۷×۱۰۰ یعنی ۳۷۰۰ میلی متر است.

تبدیل واحدهای سطح



کیلومتر مربع، مساحت مربعی به ضلع یک کیلومتر است، از طرفی چون هر کیلومتر، برابر ۱۰۰۰ متر است بنابراین ۱ کیلومتر مربع، برابر ۱۰۰۰×۱۰۰۰ یعنی ۱۰۰۰۰۰۰ متر مربع می باشد. از واحد کیلومتر مربع برای بیان مساحت سطح های بزرگ مانند مساحت قاره ها، کشورها و شهرها استفاده می شود.



یک هکتار، مساحت مربعی به ضلع ۱۰۰ متر است.
پس هر هکتار برابر ۱۰۰×۱۰۰ یعنی ۱۰۰۰۰ متر مربع می باشد.

از واحد هکتار برای بیان مساحت زمین های کشاورزی و جنگل ها استفاده می شود.

نکته: هر کیلومتر مربع برابر ۱۰۰ هکتار است.



یک متر مربع، مساحت مربعی به ضلع ۱ متر است.
از این واحد برای بیان مساحت خانه ها و اتاق ها استفاده می شود.

به طور مثال، مساحت یک اتاق ۱۲ متر مربع و ۶ دسی متر مربع می باشد. که این مساحت با $۱۲/۰۶$ متر مربع برابر است.

یک دسی متر مربع، مساحت مربعی به ضلع ۱ دسی متر است. از طرفی چون هر دسی متر، برابر $۰/۱$ متر است پس هر دسی متر مربع برابر $۰/۱ \times ۰/۱$ یعنی $۰/۰۱$ متر مربع می باشد. از این واحد هم برای بیان مساحت اتاق ها استفاده می شود.



یک سانتی متر مربع، مساحت مربعی به ضلع ۱ سانتی متر است. از طرفی چون هر سانتی متر، برابر $۰/۰۱$ متر است، پس هر سانتی متر، برابر $۰/۰۱ \times ۰/۰۱$ یعنی $۰/۰۰۰۱$ متر مربع می باشد. از این واحد برای بیان مساحت سطح های کوچک مانند سطح کتاب استفاده می شود.

نکته: پیشنهاد می شود که از الگوی زیر برای تبدیل واحدهای سطح به یک دیگر و با کمک از جدول تناسب استفاده کنید.



مثال ۲: الف) ۲۵۶ متر مربع، چند هکتار است؟

می دانیم که هر ۱۰۰۰۰ متر مربع، برابر یک هکتار است بنابراین:

هکتار	۱	?
مترمربع	۱۰۰۰۰	۲۵۶

$$\Rightarrow ? = \frac{1 \times 256}{10000} = \frac{256}{10000} = 0.0256$$

ب) ۲۵۶ هکتار، چند متر مربع است؟

از آن جا که هر هکتار برابر ۱۰۰۰۰ متر مربع است، پس ۲۵۶ هکتار را برابر 256×10000 یعنی ۲۵۶۰۰۰۰ متر مربع می باشد.

ج) ۳۵۴ دسی متر مربع، چند سانتی متر مربع است؟

می دانیم که هر دسی متر، برابر ۱۰ سانتی متر است، پس با توجه به رابطه های زیر هر دسی متر مربع برابر ۱۰۰ سانتی متر مربع است.

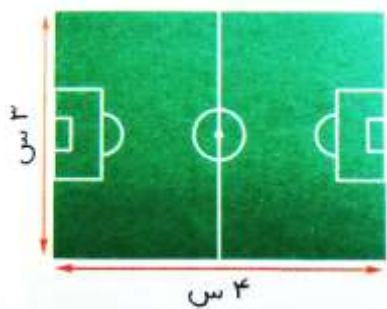
۱۰۰ سانتی متر مربع = 10×10 سانتی متر و ۱ دسی متر مربع = 1×1 دسی متر

سانتی متر مربع $354 = 354 \times 100 = 35400$

د) ۷۸۹ هکتار چند کیلومتر مربع است؟ می دانیم که هر ۱۰۰ هکتار برابر یک کیلومتر مربع است، بنابراین:

کیلومتر مربع	۱	?
هکتار	۱۰۰	۷۸۹

$$\Rightarrow ? = \frac{1 \times 789}{100} = 7.89$$



مثال ۳: اگر مستطیل مقابل، نقشه ی یک زمین فوتبال باشد و هر یک سانتی متر روی شکل برابر ۲۵ متر بر روی زمین باشد، به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) مساحت کل این زمین فوتبال چند متر است؟

با توجه به این که هر یک سانتی متر روی نقشه، معادل ۲۵ متر در طبیعت (واقعیت) است پس طول و عرض زمین برابر است با:

$$\text{متر } ۱۰۰ = ۴ \times ۲۵ = \text{طول زمین} , \text{متر } ۷۵ = ۳ \times ۲۵ = \text{عرض زمین}$$

$$\text{متر مربع } ۷۵۰۰ = ۱۰۰ \times ۷۵ = \text{مساحت زمین فوتبال}$$

ب) مساحت نیمه ی زمین فوتبال چند هکتار است؟

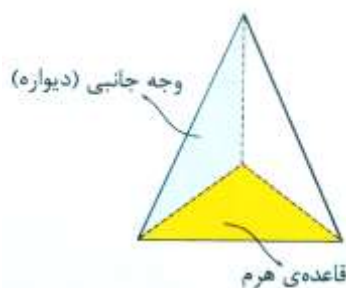
$$\text{هکتار } ۰/۳۷۵ = \text{متر مربع } ۳۷۵۰ = ۷۵۰۰ \div ۲ = \text{مساحت نیمه ی زمین فوتبال}$$

هکتار	۱	۲
متر مربع	۱۰۰۰۰	۳۷۵۰

$$\Rightarrow ? = \frac{۱ \times ۳۷۵}{۱۰۰۰} = ۰/۰۳۷۵$$

درس دوم – حجم و جرم

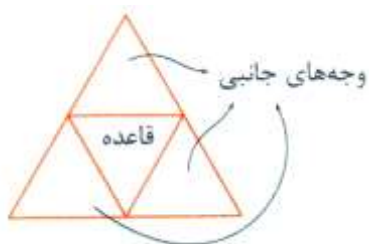
به شکل مقابل هرم می گویند.



قاعده ی هرم، یک چندضلعی است (مانند: مثلث، مربع، مستطیل، پنج ضلعی و ...)

به هر یک از سطح های تشکیل دهنده ی هرم، یک وجه می گویند.

گسترده ی هرم بالا به صورت مقابل است.

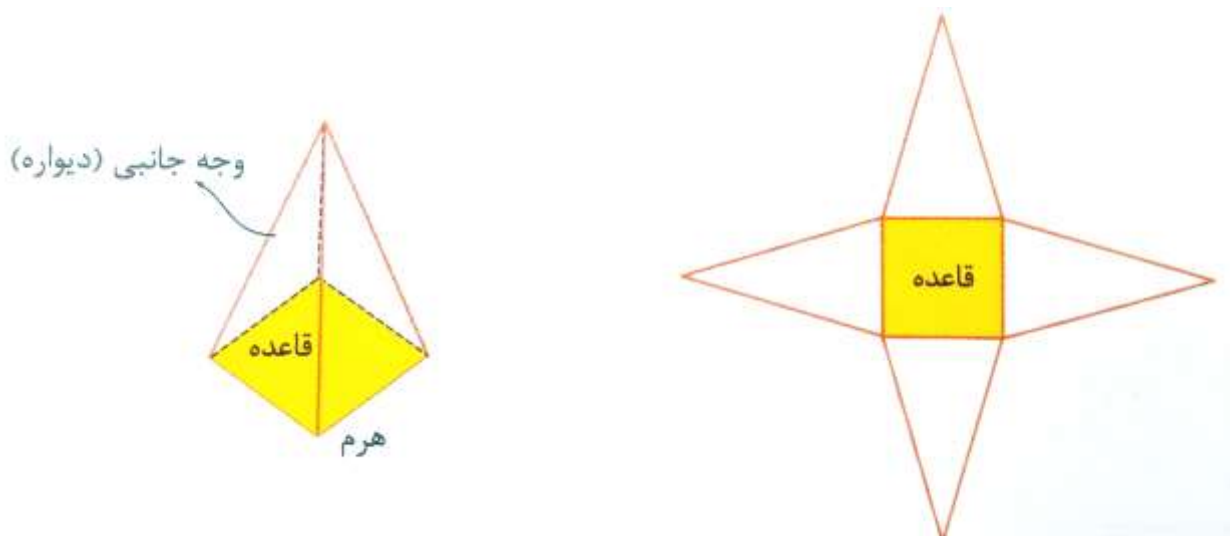


اگر گسترده هرم از چهار مثلث متساوی

الاضلاع هم اندازه تشکیل شده باشد، به آن

چهاروجهی منتظم هم گفته می شود.

شکل زیر نوع دیگری از هرم و گسترده ی آن را نشان می دهد.



شکل زیر، یک مکعب و گسترده ی آن را نشان می دهد.



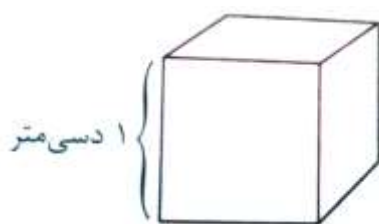
$$\text{ضلع} \times \text{ضلع} \times \text{ضلع} = \text{حجم مکعب}$$

$$\text{ضلع} \times \text{ضلع} \times 6 = \text{مساحت گسترده ی مکعب (مساحت کل مکعب)}$$

همه ی ضلع های مکعب با هم برابرند.

برای اندازه گیری حجم، واحدهایی مانند مترمکعب، دسی مترمکعب (لیتر) و سانتی مترمکعب (سی سی) وجود دارد.

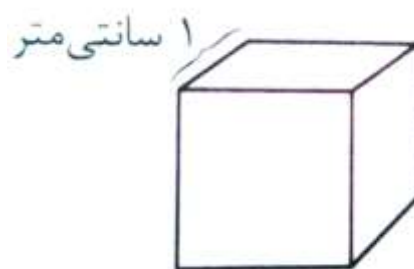
یک متر مکعب، حجم مکعبی است که اندازه ی هر ضلع آن یک متر باشد.



یک دسی مترمکعب (یا یک لیتر)، حجم مکعبی است که اندازه ی هر ضلع آن یک دسی متر یا ۱۰ سانتی متر باشد. این واحد برای اندازه گیری حجم مایعات بسیار مورد استفاده قرار می گیرد.

$$۱ \text{ لیتر یا یک دسی متر مکعب} = \text{حجم}$$

یک سانتی متر مکعب، حجم مکعبی است که اندازه ی هر ضلع آن یک سانتی متر باشد. نام های دیگر این واحد «سی سی» و «میلی لیتر» است.



۱ سانتی متر مکعب = حجم

واحدهای حجم

دسی متر مکعب $1000 = 10 \times \text{دسی متر} \times 10 \times \text{دسی متر} \times 10 \times \text{دسی متر} = 1 \times \text{متر} \times 1 \times \text{متر} \times 1 \times \text{متر} = 1 \text{ متر مکعب}$

→ لیتر $1000 = 1000 \text{ دسی متر مکعب} = 1 \text{ متر مکعب}$

سانتی متر مکعب $1000000 = 100 \times \text{سانتی متر} \times 100 \times \text{سانتی متر} \times 100 \times \text{سانتی متر} = 1 \times \text{متر} \times 1 \times \text{متر} \times 1 \times \text{متر} = 1 \text{ متر مکعب}$

→ میلی لیتر $1000000 = 1000000 \text{ سی سی} = 1000000 \text{ سانتی متر مکعب} = 1 \text{ متر مکعب}$

سانتی متر مکعب $1000 = 10 \times \text{سانتی متر} \times 10 \times \text{سانتی متر} \times 10 \times \text{سانتی متر} = 1 \times \text{دسی متر} \times 1 \times \text{دسی متر} \times 1 \times \text{دسی متر} = 1 \text{ دسی متر مکعب} = 1 \text{ لیتر}$

→ میلی لیتر $1000 = 1000 \text{ سی سی} = 1000 \text{ سانتی متر مکعب} = 1 \text{ دسی متر مکعب} = 1 \text{ لیتر}$

برای تبدیل واحدهای حجم می توان از دو روش ضرب و جدول تناسب استفاده کرد.

مثال: $\frac{3}{2}$ متر مکعب برابر چند لیتر است؟

پاسخ:

روش ۱: می دانیم که هر متر مکعب مساوی ۱۰۰۰ لیتر است؛ پس: $\frac{3}{2} \times 1000 = 3200$ لیتر

روش ۲: استفاده از جدول تناسب

متر مکعب	۱	$\frac{3}{2}$
لیتر	۱۰۰۰	

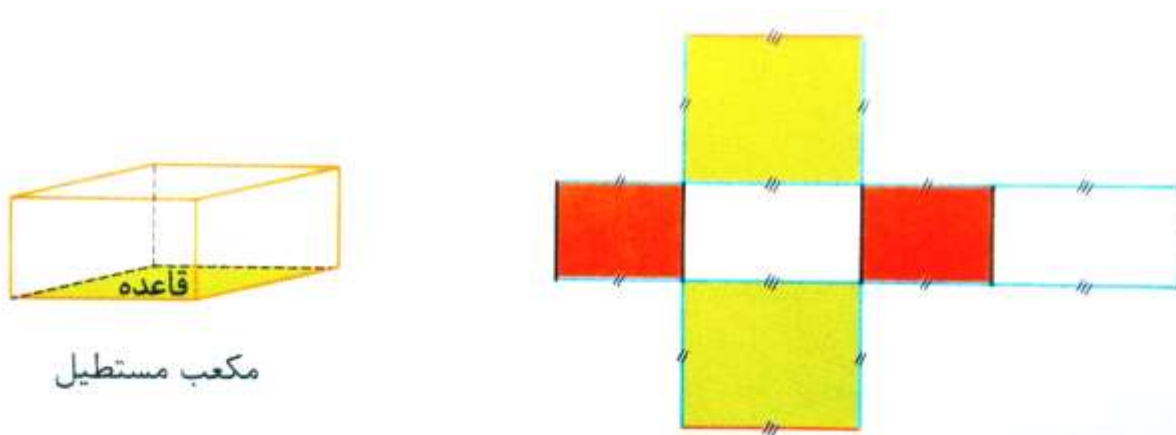
→ $\boxed{} = \frac{\frac{3}{2} \times 1000}{1} = 3200$ لیتر

مثال: حجم و مساحت گسترده ی مکعبی به ضلع ۵ سانتی متر را حساب کنید.

$$\text{سانتی متر مکعب } 125 = 5 \times 5 \times 5 = \text{حجم}$$

$$\text{سانتی متر مربع } 150 = 5 \times 5 \times 6 = \text{مساحت گسترده (مساحت کل)}$$

شکل زیر یک مکعب مستطیل و گسترده ی آن را نشان می دهد. اضلاع برابر در گسترده ی شکل مشخص شده اند.



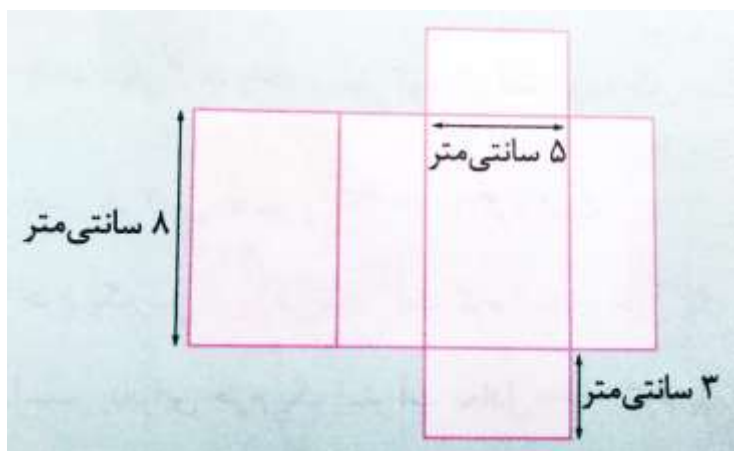
در گسترده ی مکعب مستطیل، سطح هایی (وجه هایی) که هم رنگ هستند، دارای مساحت های مساوی هستند. این سطح ها در مکعب مستطیل در مقابل هم قرار می گیرند.

اگر اضلاع مکعب مستطیل را به صورت مقابل نام گذاری کنیم، حجم و مساحت گسترده ی (مساحت کل) آن به صورت زیر محاسبه می شود.



$$\text{مساحت گسترده ی مکعب مستطیل (مساحت کل)} = 2 \times [(\text{طول} \times \text{عرض}) + (\text{ارتفاع} \times \text{طول}) + (\text{ارتفاع} \times \text{عرض})]$$

مثال: شکل مقابل گسترده ی یک مکعب مستطیل است. با توجه به اندازه های روی آن، حجم و مساحت گسترده ی مکعب مستطیل را حساب کنید.



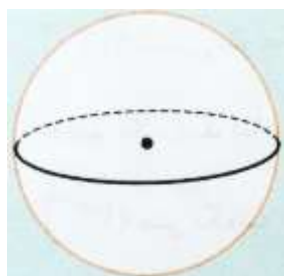
پاسخ:

$$\text{حجم} = ۸ \times ۵ \times ۳ = ۱۲۰ \text{ سانتی متر مکعب}$$

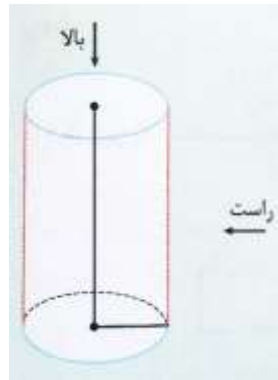
$$\text{مساحت گسترده (مساحت کل)} = ۲ \times \left[\underbrace{(۸ \times ۵)}_{۴۰} + \underbrace{(۸ \times ۳)}_{۲۴} + \underbrace{(۵ \times ۳)}_{۱۵} \right] = ۱۵۸ \text{ سانتی متر مربع}$$



شکل مقابل یک مخروط است. مخروط شبیه هرم است، فقط قاعده ی آن به شکل دایره است (چند ضلعی نیست).



شکل مقابل یک کره است. توپ فوتبال به شکل یک کره است. کره را از هر طرف نگاه کنیم، یک دایره می بینیم.



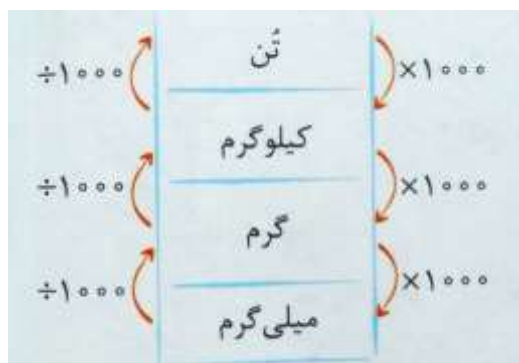
شکل مقابل یک استوانه است.

استوانه ی مقابل را اگر از بالا نگاه کنیم، یک دایره می بینیم و اگر از راست یا روبه رو نگاه کنیم، یک مستطیل می بینیم.

دو تصویر مختلف از این استوانه:



واحدهای اندازه گیری جرم: واحدهای معمول اندازه گیری جرم از کوچک به بزرگ، عبارت اند از:



میلی گرم - گرم - کیلوگرم - تن

جدول مقابل، رابطه ی بین این واحدها را نشان می دهد.

واحد میلی گرم، واحد بسیار کوچکی است و به طور معمول در صنایع داروسازی مورد استفاده قرار می گیرد.

یعنی هر ۱ تن، مساوی ۱۰۰۰۰۰۰ گرم است.

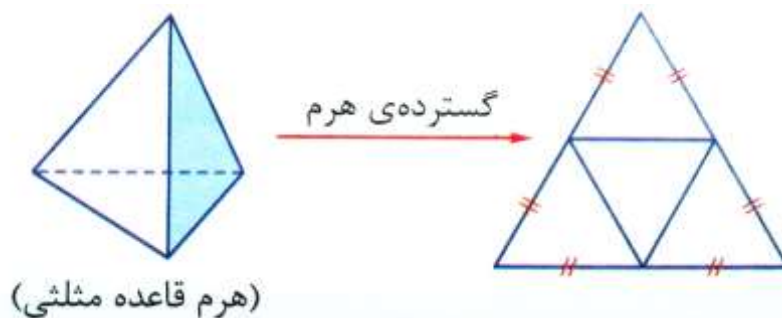
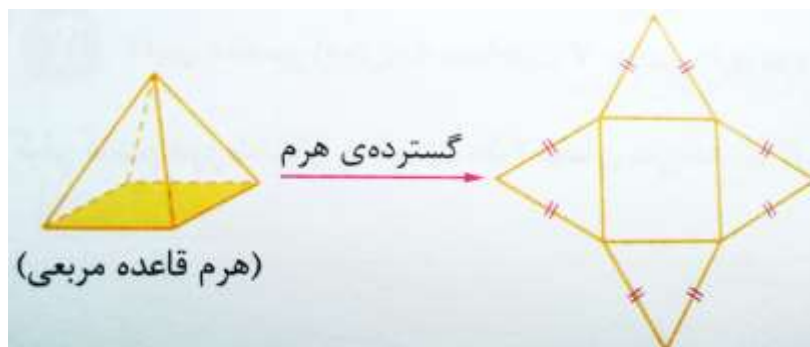
جرم یک سی سی آب تقریباً یک گرم است و چون یک لیتر مساوی ۱۰۰۰ سی سی است، بنابراین جرم یک لیتر آب معادل ۱۰۰۰ گرم یا یک کیلوگرم است.



حجم و جرم ۲

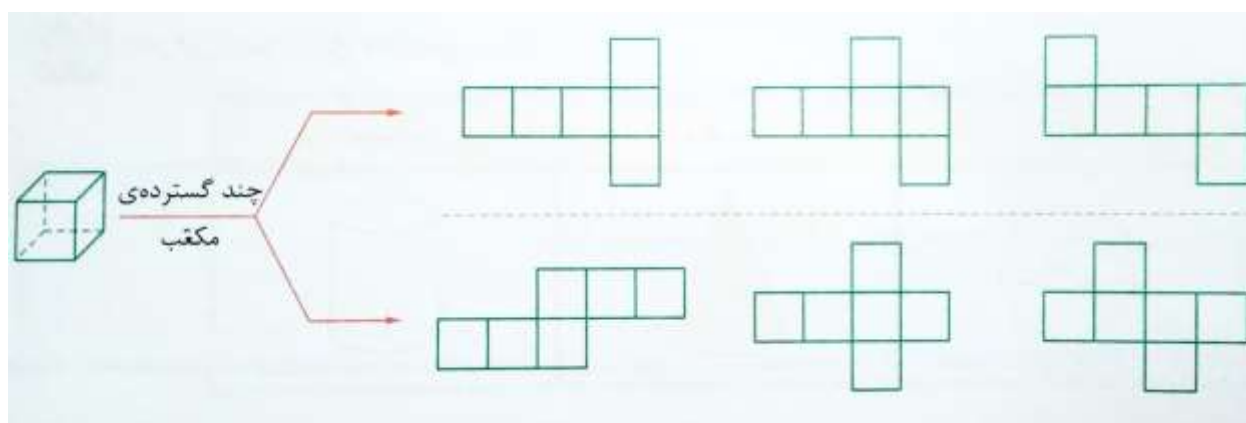
هرم

هرم یک شکل فضایی (چندوجهی) است که همه ی وجه های آن به جز یکی از آن ها در یک رأس مشترک هستند. به شکل های زیر دقت کنید.



مکعب

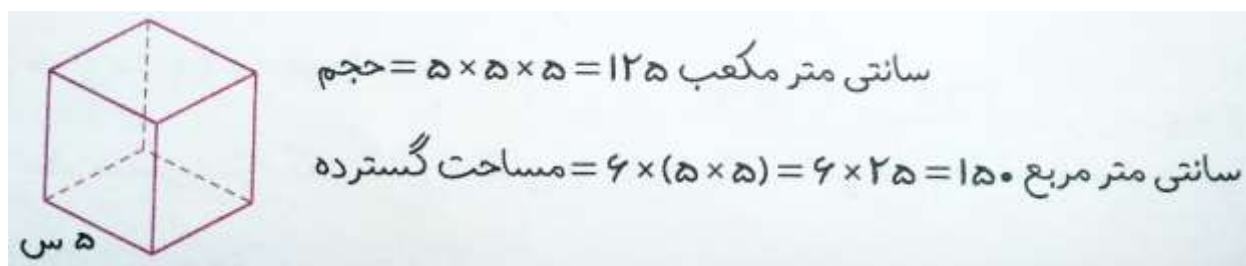
مکعب یک شکل فضایی شش وجهی است که تمامی وجه های آن از مربع های برابر هستند. هر مکعب دارای ۸ گوشه (رأس) و ۱۲ لبه (ضلع) است.



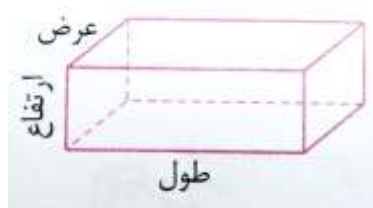
اندازه ی لبه (ضلع) را سه مرتبه نوشته و در هم ضرب کنید = حجم مکعب

مساحت یک مربع $\times 6$ = مساحت یک وجه $\times 6$ = مساحت گسترده ی مکعب

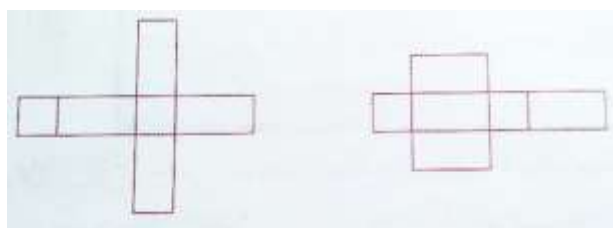
مثال ۱: یک مکعب به صورت مقابل است. حجم و مساحت گسترده ی این مکعب چه قدر است؟



مکعب مستطیل



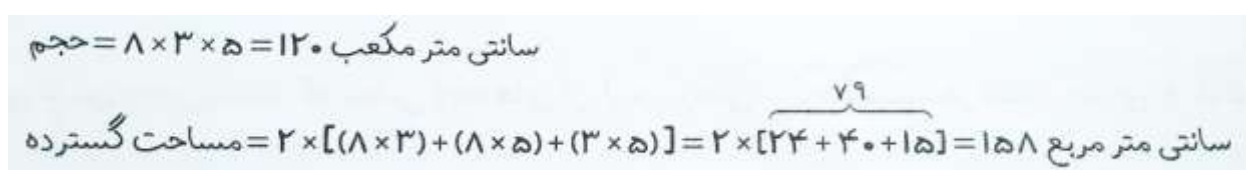
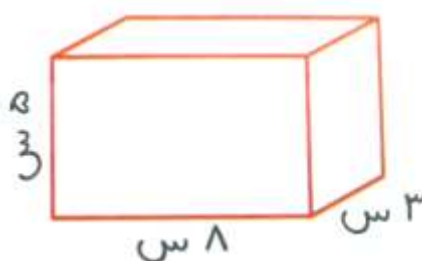
مکعب مستطیل یک شکل فضایی شش وجهی است که تمامی وجه های آن به شکل مستطیل هستند. هر مکعب مستطیل دارای ۸ گوشه (رأس) و ۱۲ لبه (ضلع) است. شکل های زیر چند حالت گسترده ی مکعب مستطیل را نمایش می دهند.



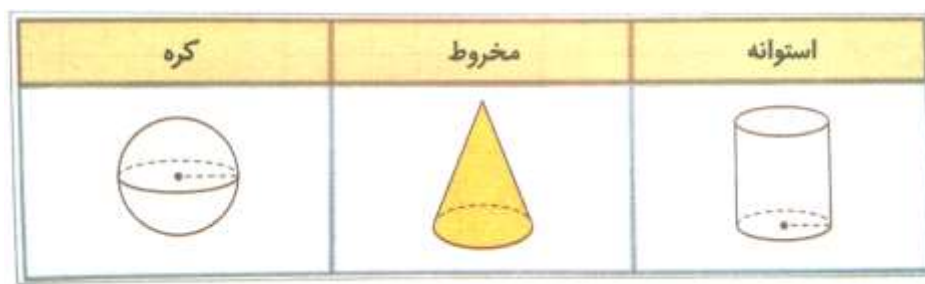
ارتفاع $\times$ عرض $\times$ طول = حجم مکعب مستطیل

$2 \times [(\text{طول} \times \text{عرض}) + (\text{ارتفاع} \times \text{طول}) + (\text{ارتفاع} \times \text{عرض})]$ = مساحت گسترده ی مکعب مستطیل

مثال ۲: حجم و مساحت گسترده ی مکعب مستطیل مقابل را به دست آورید.

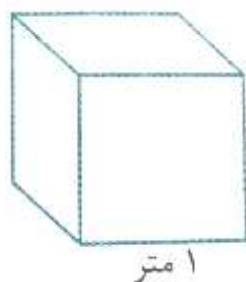


معرفی چند شکل هندسی دیگر



معرفی و تبدیل واحدهای حجم

یک متر مکعب: اگر مکعبی به ضلع یک متر داشته باشیم، حجم آن یک متر مکعب می باشد.



$$۱ \text{ متر} \times ۱ \text{ متر} \times ۱ \text{ متر} = ۱ \text{ متر مکعب}$$

یک دسی متر مکعب: اگر مکعبی به ضلع یک دسی متر داشته باشیم حجم آن یک دسی متر مکعب می باشد.

یک سانتی متر مکعب: اگر مکعبی به ضلع یک سانتی متر داشته باشیم حجم آن یک سانتی متر مکعب می باشد.

هر متر برابر ۱۰ دسی متر است پس:

$$۱۰۰۰ \text{ دسی متر مکعب} = ۱۰ \text{ دسی متر} \times ۱۰ \text{ دسی متر} \times ۱۰ \text{ دسی متر} = ۱ \text{ متر مکعب}$$

هر متر برابر ۱۰۰ سانتی متر است پس:

$$۱۰۰۰۰۰ \text{ سانتی متر مکعب} = ۱۰۰ \text{ سانتی متر} \times ۱۰۰ \text{ سانتی متر} \times ۱۰۰ \text{ سانتی متر} = ۱ \text{ متر مکعب}$$

نکته:

۱- هر سانتی متر مکعب برابر یک سی سی است.

۲- هر دسی متر مکعب برابر یک لیتر است، پس هر لیتر برابر ۱۰۰۰ سی سی می باشد.

۳- هر متر مکعب برابر ۱۰۰ لیتر است.

مثال ۳: مخزنی داریم به شکل مکعب مستطیل و به ابعاد ۱ متر، ۵ دسی متر و ۳۰ سانتی متر، حجم این مخزن چند دسی متر مکعب است؟ در این مخزن چند لیتر آب می توان ریخت؟ ابتدا بهتر است تمامی واحدها را به دسی متر تبدیل کنیم. ۳ دسی متر = ۳۰ سانتی متر = ارتفاع مکعب مستطیل

$$۱۰ دسی متر = ۱ متر = طول مکعب مستطیل$$

$$دسی متر مکعب = ۱۵۰ = ۱۰ \times ۵ \times ۳ = حجم مکعب مستطیل$$

می دانیم که هر دسی متر مکعب با ۱ لیتر برابر است پس گنجایش این مخزن همان ۱۵۰ لیتر است.

تبدیل واحدهای جرم

تن: هر هزار کیلوگرم برابر یک تن است. پس یک کیلوگرم برابر $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ تن می باشد.

کیلوگرم: هر کیلوگرم برابر ۱۰۰۰ گرم است. پس یک گرم برابر $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ کیلوگرم می باشد.

گرم: هر گرم برابر ۱۰۰۰ میلی گرم است. پس هر میلی گرم برابر $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ گرم است.

نکته: برای تبدیل واحدهای جرم می توان از الگوی زیر استفاده کرد:



مثال ۴: الف) ۸۳۵۴ کیلوگرم چند تن است؟

تن	۱	۲
کیلوگرم	۱۰۰۰	۸۳۵۴

$$\Rightarrow ۲ = \frac{۱ \times ۸۳۵۴}{۱۰۰۰} = \frac{۸۳۵۴}{۱۰۰۰} = ۸/۳۵۴ \text{ تن}$$

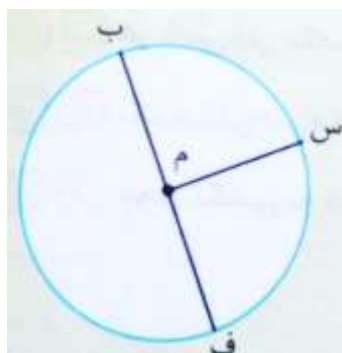
ب) ۵۴۹ میلی گرم چند کیلوگرم است؟

کیلوگرم	۱	۲
میلی گرم	۱۰۰۰۰۰	۵۴۹

$$\Rightarrow ۲ = \frac{۱ \times ۵۴۹}{۱۰۰۰۰۰} = \frac{۵۴۹}{۱۰۰۰۰۰} = ۰/۰۰۰۵۴۹ \text{ کیلوگرم}$$

درس سوم - مساحت دایره

شکل مقابل یک دایره را نشان می دهد.



نقطه ی «م» مرکز دایره است.

پاره خط «م س» شعاع دایره است.

پاره خط «ف ب» قطر دایره است.

دایره دارای بی شمار شعاع و بی شمار قطر است.

شعاع های دایره با هم برابر و قطرهای دایره نیز با هم برابرند.

اندازه ی هر قطر دو برابر شعاع است، یعنی اندازه ی شعاع نصف قطر است.

$$\text{محیط دایره} = \frac{3}{14} \times \text{قطر}$$

$$\text{مساحت دایره} = \frac{3}{14} \times \text{شعاع} \times \text{شعاع}$$

عدد $\frac{3}{14}$ را عدد پی می گویند. (البته این عدد مقدار تقریبی عدد پی است.)

توجه: محیط ه ر شکل یعنی دوتا دور شکل، یعنی طول خطی که دو شکل را تشکیل می دهد.

مثال: در شکل های زیر، محیط هر شکل با خط قرمز مشخص شده است.



می دانیم که یک دایره کامل، یک زاویه ی 360° درجه را نشان می دهد. اکنون به شکل های زیر که در آن ها دایره ها به قسمت های مساوی تقسیم شده اند و اندازه ی زاویه های هر بخش دقت کنید.



مثال: محیط و مساحت نیم دایره ی شکل مقابل را حساب کنید.



$$10 \times 10 \times 3/14 = 314 \text{ سانتی متر مربع}$$

پاسخ: مساحت دایره ی کامل:

$$314 \div 2 = 157 \text{ سانتی متر مربع}$$

مساحت نیم دایره:

$$\text{اندازه ی قطر د س} + \text{طول خط منحنی} = \text{محیط نیم دایره}$$

$$\text{طول خط منحنی} = \frac{X \times 10 \times 3/14}{X} = 31/4$$

$$\text{محیط نیم دایره} = 31/4 + 20 = 51/4$$

اندازه ی قطر د س

مثال: محیط و مساحت شکل مقابل را حساب کنید.



پاسخ: شکل مقابل $\frac{3}{4}$ یک دایره است.

$$\text{مساحت شکل} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{100} \times 20 \times 3 / 14 = 3 \times 100 \times 3 / 14 = 3 \times 31$$

$$\text{محیط شکل} = \underbrace{2 \times \frac{5}{100} \times 3 / 14 \times \frac{3}{4}}_{\text{مجموع دو شعاع}} + \underbrace{2 \times 20}_{\text{طول خط منحنی}} = 94/2 + 40 = 134/2$$

مساحت دایره ۲

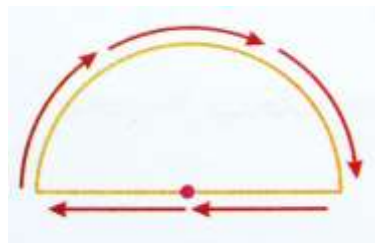
یادآوری

در سال های گذشته با محیط دایره و نحوه ی محاسبه ی آن آشنا شدید:



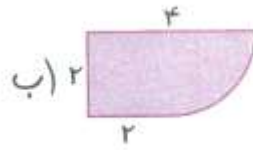
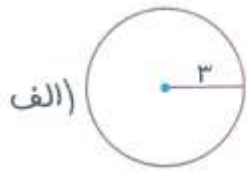
$$\text{عدد پی} \times \text{شعاع} \times 2 = \text{عدد پی} \times \text{قطر} = \text{محیط دایره}$$

با توجه به رابطه ی بالا نصف محیط دایره برابر است با حاصل ضرب شعاع در عدد پی، اما دقت داشته باشید که محیط یک نیم دایره از رابطه ی زیر به دست می آید.



$$\text{قطر} + (\text{عدد پی} \times \text{شعاع}) = \text{محیط نیم دایره}$$

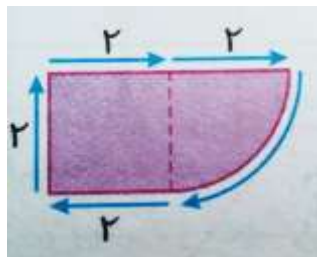
مثال ۱: محیط هر یک از شکل های زیر را به دست آورید.



الف) در این شکل کافی است که محیط یک دایره کامل به شعاع ۳ واحد را حساب کنیم.

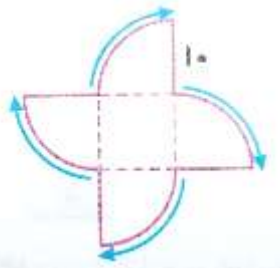
$$\text{محیط شکل} = 2 \times \frac{3}{14} = 18/14$$

ب) اگر شکلی را به صورت مقابل تقسیم بندی کنیم به این ترتیب محیط شکل برابر است با:



$$\text{محیط شکل} = 4 \times 2 + \text{ربع محیط دایره} = 8 + \frac{2 \times 2 \times \frac{3}{14}}{4} = 8 + \frac{3}{14} = 11/14$$

ج) اگر در شکل مقابل ۴ کمان مشخص شده را به هم بچسبانیم، به این ترتیب باید محیط یک دایره کامل و ۴ پاره خط ۱۰ واحدی را با هم جمع کنیم.



$$\text{محیط شکل} = 4 \times 10 + \text{محیط یک دایره کامل} = 40 + (2 \times 10 \times \frac{3}{14}) = 40 + 62/8 = 102/8$$

مساحت دایره

در کتاب درسی چگونگی اثبات رابطه ی مساحت دایره بیان شده است و در این جا فقط به بیان این رابطه می پردازیم.

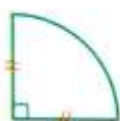


$$\text{مساحت دایره} = \text{شعاع} \times \text{شعاع} \times \text{عدد پی}$$

بنابراین:

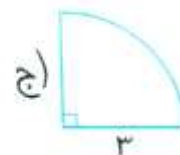
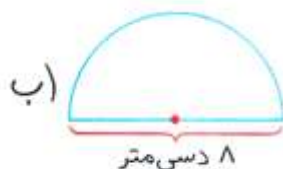


$$\text{مساحت نیم دایره} = (\text{شعاع} \times \text{شعاع} \times \text{عدد پی}) \div 2$$



$$\text{مساحت ربع دایره} = (\text{شعاع} \times \text{شعاع} \times \text{عدد پی}) \div 4$$

مثال ۲: مساحت هر یک از شکل های زیر را به دست آورید.



الف) سانتی متر مربع $۷۸/۵ = ۲۵ \times ۳/۱۴ = ۵ \times ۵ \times ۳/۱۴$ مساحت دایره به شعاع ۵ سانتی متر

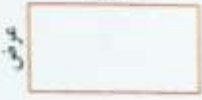
ب) دقت داشته باشید که در این نیم دایره، اندازه ی قطر داده شده است لذا ابتدا باید اندازه ی شعاع را حساب کنیم:

$$\text{دسی متر } ۴ = ۸ \div ۲ = \text{شعاع نیم دایره به قطر } ۸ \text{ دسی متر}$$

$$\Rightarrow \text{مساحت نیم دایره} = \frac{۴ \times ۴ \times ۳/۱۴}{۲} = ۸ \times ۳/۱۴ = ۲۵/۱۴ \text{ دسی متر مربع}$$

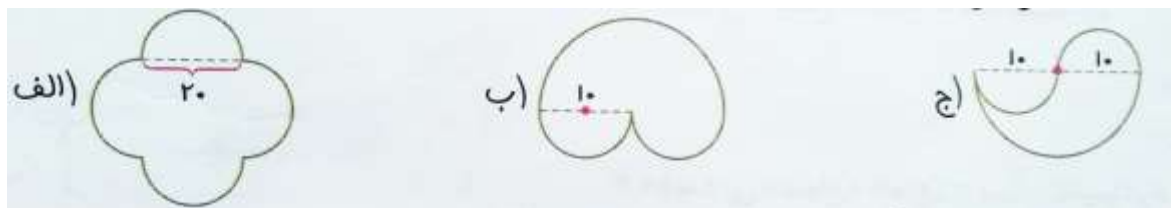
$$\text{ج) مساحت ربع دایره به شعاع } ۳ \text{ واحد} = \frac{۳ \times ۳ \times ۳/۱۴}{۴} \div ۴ = \frac{۹ \times ۳/۱۴}{۴} = \frac{۲۸/۲۶}{۴} = ۷/۰۶۵$$

یادآوری مساحت چند شکل مهم

 مساحت مستطیل = عرض $\times$ طول	 مساحت مربع = خودش $\times$ یک ضلع $\text{مساحت مربع} = (\text{قطر} \times \text{قطر}) \div 2$	 مساحت لوزی = حاصل ضرب دو قطر $\div 2$
 مساحت متوازی الاضلاع = ارتفاع $\times$ قاعده	 مساحت مثلث = $(\text{قاعده} \times \text{ارتفاع}) \div 2$	 مساحت ذوزنقه = $(\text{ارتفاع} \times \text{جمع دو قاعده}) \div 2$

مساحت شکل های ترکیبی

گاهی اوقات برای محاسبه ی یک شکل باید آن را به دو یا چند شکل که رابطه مساحت آن ها را می دانیم تقسیم بندی کنیم، سپس با محاسبه ی مساحت آن شکل ها، مساحت شکل اصلی را حساب کنیم.
 مثال ۳: مساحت شکل های زیر را حساب کنید.



(الف) با تقسیم شکل به صورت روبه رو، یک مربع و ۴ نیم دایره به وجود می آید، بنابراین:

دو برابر مساحت یک دایره + مساحت مربع = مساحت شکل

$$\text{مساحت شکل} = (20 \times 20) + 2 \times (10 \times 10 \times 3/14) = 400 + 428 = 828$$

(ب) با تقسیم شکل به صورت روبه رو، یک نیم دایره به شعاع ۱۰ و دو نیم دایره به شعاع ۵ به دست می آید، بنابراین:

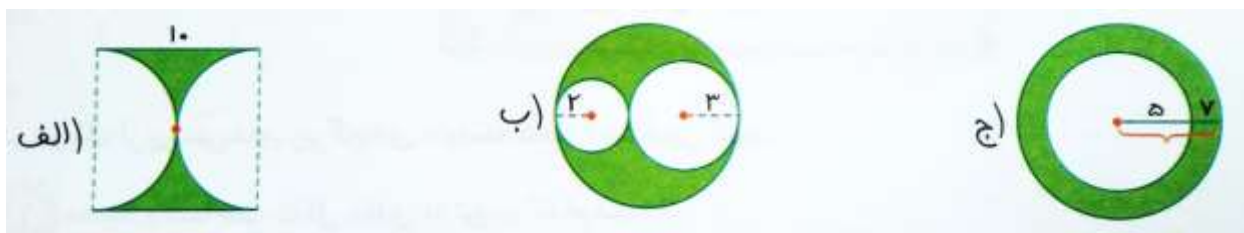
مساحت دایره به شعاع ۵ + مساحت نیم دایره ی بزرگ به شعاع ۱۰ = مساحت شکل

$$= \frac{5 \times 10 \times 3/14}{2} + 5 \times 5 \times 3/14 = 157 + 78/5 = 235/5$$

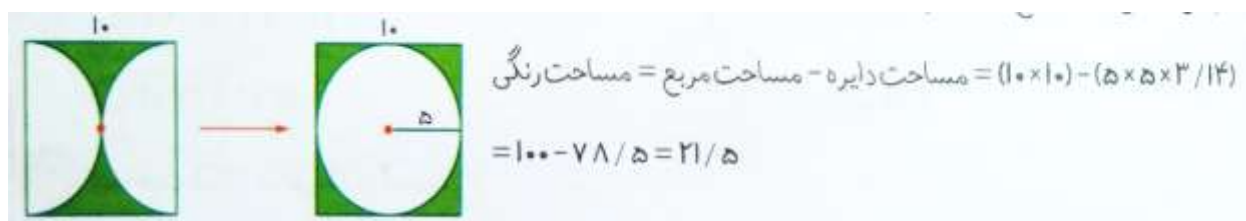
(ج) با برش شکل و انتقال نیم دایره ی کوچک به قسمت سفید در نیم دایره ی بزرگ، ملاحظه می کنید که یک نیم دایره به شعاع ۱۰ واحد به وجود می آید.

$$\text{مساحت نیم دایره} = \frac{10 \times 10 \times 3/14}{2} = \frac{314}{2} = 157$$

مثال ۴: در هر یک از شکل های زیر مساحت قسمت رنگی را به دست آورید.



الف) در این شکل یک مربع و دو نیم دایره به قطر ۱۰ واحد دیده می شود که می توانیم شکل را به صورت مقابل تبدیل کنیم.



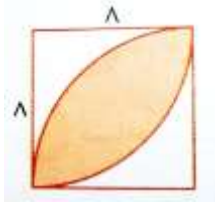
ب) در این شکل یک دایره به شعاع ۲، یک دایره به شعاع ۳ و یک دایره به شعاع ۵ واحد دیده می شود. بنابراین:

$$\begin{aligned} \text{مساحت دایره به شعاع ۲} + \text{مساحت دایره به شعاع ۳} - \text{مساحت دایره به شعاع ۵} &= \text{مساحت قسمت رنگی} \\ &= (5 \times 5 \times 3/14) - (3 \times 3 \times 3/14 + 2 \times 2 \times 3/14) = 78/5 - (28/24 + 12/56) \\ &= 78/5 - 40/12 = 37/68 \end{aligned}$$

ج) در این شکل یک دایره به شعاع ۵ و یک دایره به شعاع (۷ + ۵) یعنی ۱۲ واحد دیده می شود، بنابراین:

$$\begin{aligned} \text{مساحت دایره به شعاع ۵} - \text{مساحت دایره به شعاع ۱۲} &= \text{مساحت قسمت رنگی} \\ &= (12 \times 12 \times 3/14) - (5 \times 5 \times 3/14) = 452/14 - 78/5 = 373/64 \end{aligned}$$

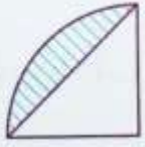
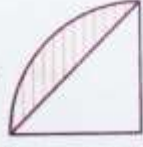
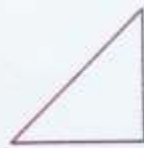
مثال ۵: مساحت قسمت رنگی شکل مقابل را حساب کنید.



روش اول: اگر به شکل دقت کنید دو ربع دایره به صورت  و  دیده می شود که با روی هم گذاشتن آن ها شکل  به دست می آید. بنابراین دو تا ربع دایره به اندازه ی یک اضافه دارند تا تبدیل به مربع شوند.

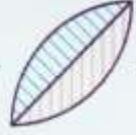
$$\text{مساحت شکل} = \underbrace{\text{مساحت دو تا ربع دایره}}_{\text{یک نیم دایره}} - \text{مساحت مربع} = \frac{8^2 \times 8 \times 3.14}{4} - (8 \times 8) = 100.48 - 64 = 36.48$$

روش دوم: اگر هر ربع دایره را به صورت مقابل برش بزنیم به این ترتیب؛

 $\xrightarrow{\text{برش}}$  $\Rightarrow$  -  = 

مساحت نیم پرگ = مساحت مثلث - مساحت ربع دایره

$$\frac{8 \times 8 \times 3.14}{4} - \frac{8 \times 8}{2} = 50.24 - 32 = 18.24$$

 +  =  $\Rightarrow$ مساحت رنگی = $2 \times 18.24 = 36.48$

درس چهارم - خط و زاویه

فاصله ی بین دو نقطه، طول پاره خطی است که دو نقطه را به هم وصل می کند. در شکل روبه رو، فاصله ی دو نقطه ی «ب» و «س» برابر است با طول پاره خط «ب س».

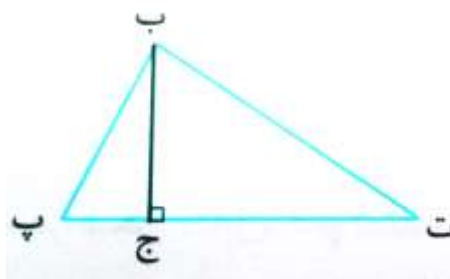


فاصله ی یک نقطه تا یک خط (پاره خط)، برابر است با طول پاره خط عمودی که از آن نقطه بر خط رسم می شود. در شکل زیر فاصله ی نقطه ی «م» از خط «ب پ» برابر است با طول پاره خط «م ج».



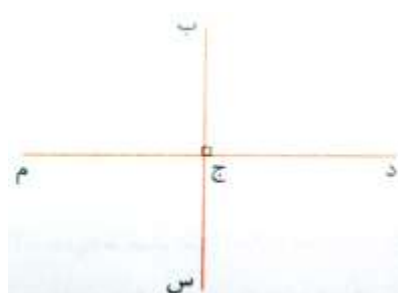
فاصله ی هر رأس مثلث از ضلع مقابل آن، برابر است با ارتفاع وارد بر آن ضلع.

در شکل زیر، «ب ج» فاصله ی نقطه ی «ب» از ضلع «پ ت» است، بنابراین «ب ج» ارتفاع وارد بر ضلع «پ ت» است.

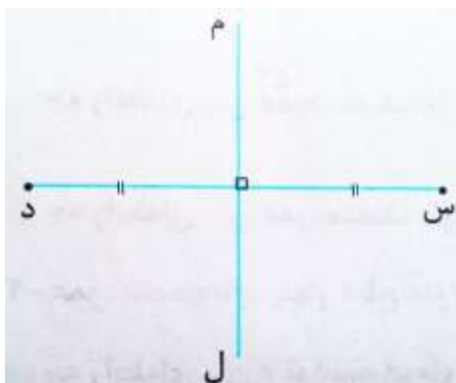


از هر نقطه روی یک خط (پاره خط) فقط یک خط عمود بر آن می توان رسم کرد.

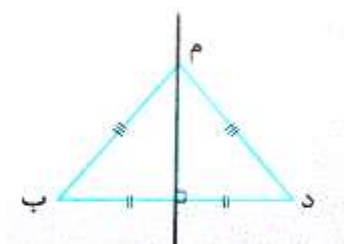
مثال: از نقطه ی «ج» روی خط «م د» فقط یک خط مانند «ب س» را می توان بر خط «م د» عمود رسم کرد.



عمودمنصف یک پاره خط، خطی است که از وسط پاره خط بگذرد و بر آن عمود رسم شود. در شکل مقابل خط «م ل» عمود منصف پاره خط «س د» است.



دقت کنید: چون هر پاره خط، فقط یک نقطه ی وسط دارد، بنابراین هر پاره خط فقط یک عمودمنصف دارد. نکته: هر نقطه روی عمود منصف پاره خط، از دو سر پاره خط به یک فاصله است، یعنی در شکل روبه رو «م د» با «ب» برابر است.

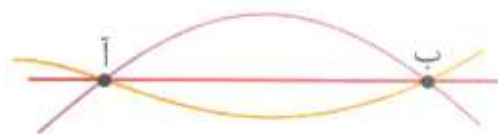


دقت کنید: چون خط و نیم خط اندازه ی مشخصی ندارند، بنابراین نقطه ی وسط آن ها نیز مشخص نیست. پس برای نیم خط و خط نمی توان عمودمنصف رسم کرد.

خط و زاویه ۲

فاصله ی دو نقطه از هم

می دانیم که از دو نقطه بی شمار خط خمیده می گذرد، اما از دو نقطه فقط یک خط راست عبور می کند که به این ترتیب طول پاره خطی که دو نقطه را به یک دیگر وصل می کند برابر فاصله ی بین این دو نقطه است. در شکل زیر طول پاره خط (آ ب) برابر فاصله بین دو نقطه ی (آ) و (ب) است.



نکته: فاصله ی دو نقطه، طول کوتاه ترین پاره خطی است که دو نقطه را به هم وصل می کند.

فاصله ی نقطه از خط

کوتاه ترین فاصله ی یک نقطه تا یک خط، برابر طول پاره خطی است که از نقطه ی مورد نظر بر آن خط عمود می شود، برای رسم پاره خط عمود از یک نقطه بر یک خط می توانیم از گونیا استفاده کنیم.

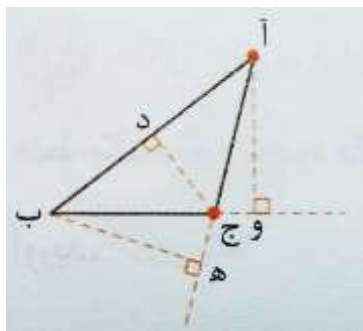
در شکل مقابل فاصله ی نقطه ی (آ) از خط (د م) برابر $\frac{1}{4}$ سانتی متر است.



نکته: فاصله ی نقطه از خط، طول پاره خطی است که از آن نقطه به خط عمود می شود.

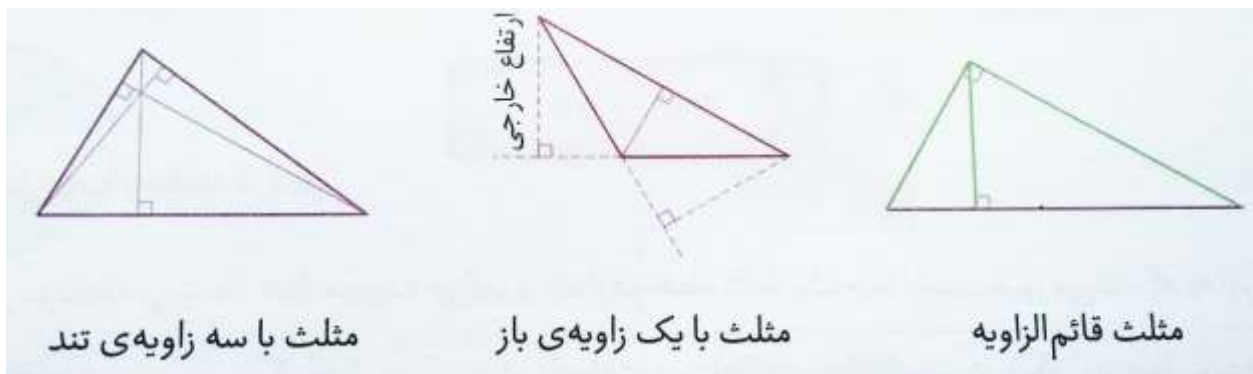
رسم ارتفاع در مثلث

نظیر ضلع (ج ب) می باشد که بر امتداد ضلع (ج ب) عمود شده است و این اتفاق زمانی می افتد که مثلث زاویه ی بزرگ تر از 90° درجه داشته باشد.



اگر در مثلثی از یک رأس بر ضلع مقابل آن عمود کنیم این پاره خط عمود، همان ارتفاع مثلث و ضلع مقابل به آن نیز قاعده ی نظیر آن ارتفاع می باشد. در شکل زیر از رأس (ج) بر ضلع مقابل آن یعنی ضلع (آ ب)، پاره خط (ج د) را عمود کرده ایم، به این ترتیب پاره خط (د ج) همان ارتفاع مثلث و ضلع (آ ب) نیز قاعده ی متناظر با آن ارتفاع می باشد. توجه داشته باشید که گاهی مجبوریم ارتفاع وارد بر یک ضلع را در خارج از مثلث بر امتداد آن ضلع رسم کنیم. در شکل زیر پاره خط (آ و) ارتفاع

هر مثلث دارای سه ارتفاع می باشد که همگی آن ها یک دیگر را در یک نقطه قطع می کنند. در شکل های زیر ارتفاع های سه نوع مثلث را نشان داده ایم، به ارتفاع هایی که در بیرون مثلث رسم می شوند ارتفاع خارجی می گوییم.

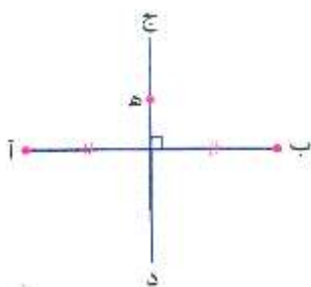


مثلث با سه زاویه ی تند

مثلث با یک زاویه ی باز

مثلث قائم الزاویه

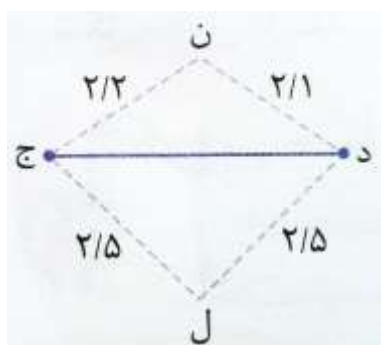
عمود منصف



در شکل مقابل خط (ج د) بر پاره خط (آ ب) عمود شده و آن را به دو قسمت مساوی تقسیم کرده است. به این خط (یعنی خط ج د)، عمود منصف پاره خط (ب آ) گفته می شود.

نکته:

- ۱- عمود منصف، خطی است که از وسط پاره خط بگذرد و بر آن عمود باشد.
 - ۲- هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است.
- در شکل بالا نقطه ی (ه) روی عمود منصف پاره خط (ب آ) قرار دارد از طرفی فاصله ی دو نقطه (ه آ) با فاصله ی دو نقطه ی (ه ب) برابر است، از این خاصیت می توان برای تشخیص عمود منصف بودن یک خط استفاده کرد.



به طور مثال در شکل مقابل خطی که از دو نقطه (ن) و (ل) می گذرد نمی تواند عمود منصف پاره خط (ج د) باشد زیرا فاصله ی نقطه ی (ن) از دو سر پاره خط به یک اندازه نیست.

انواع زاویه ۱



- اندازه ی زاویه ی راست (قائمه)، برابر 90° درجه است.
- اندازه ی زاویه نیم صفحه، برابر 180° درجه است.
- اندازه ی زاویه تند، از صفر درجه بیشتر و از 90° کم تر است.
- اندازه ی زاویه باز، از 90° درجه بیشتر و از 180° درجه کم تر است.

اندازه ی زاویه ی تمام صفحه، مساوی ۳۶۰ درجه است.

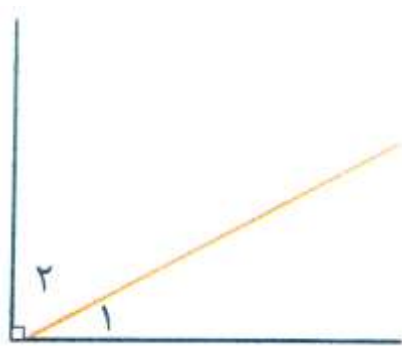


یعنی:

زاویه ی تمام صفحه < زاویه ی نیم صفحه < زاویه ی باز < زاویه ی راست < زاویه ی تند

دو زاویه ی متمم: اگر مجموع دو زاویه ۹۰ درجه باشد، آن دو زاویه را متمم گویند.

در شکل مقابل زاویه های ۱ و ۲ متمم اند.



در مثلث قائم الزاویه، دو زاویه ی تند متمم یکدیگرند.



مثال: اندازه ی متمم زاویه ی ۲۵ درجه را حساب کنید.

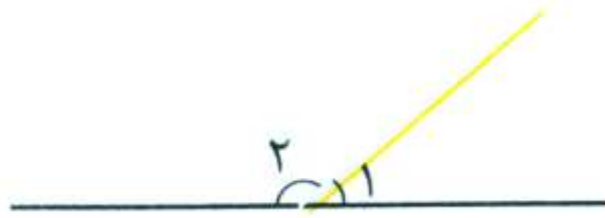
پاسخ:

$$90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$$

یعنی زاویه ی ۶۵ درجه متمم زاویه ی ۲۵ درجه است.

اگر مجموع دو زاویه ۱۸۰ درجه باشد، آن دو زاویه را مکمل می گویند.

در شکل مقابل زاویه های ۱ و ۲ مکمل اند.



مثال: اندازه ی مکمل زاویه ی ۱۲۰ درجه را حساب کنید.

پاسخ:

$$180^{\circ} - 120^{\circ} = 60^{\circ}$$

یعنی زاویه ی ۶۰ درجه مکمل زاویه ی ۱۲۰ درجه است.

در متوازی الاضلاع، زاویه های مجاور مکمل اند، یعنی:



مثال:

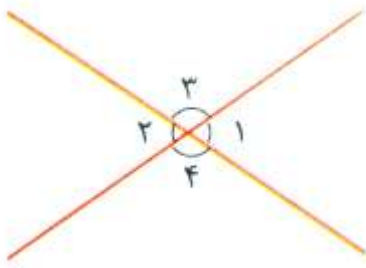
الف) اندازه ی زاویه ی متمم و مکمل زاویه ۳۵ درجه را حساب کنید.

ب) اختلاف مکمل و متمم این زاویه چند درجه است؟

پاسخ:

$$\begin{aligned} \text{مکمل زاویه } 180^{\circ} - 35^{\circ} &= 145^{\circ} \\ \text{متمم زاویه } 90^{\circ} - 35^{\circ} &= 55^{\circ} \\ 145^{\circ} - 55^{\circ} &= 90^{\circ} \end{aligned}$$

نکته: اختلاف مکمل و متمم هر زاویه ای همیشه ۹۰ است.



اگر دو خط راست یکدیگر را قطع کنند، ۴ زاویه

درست می شود که زاویه های روبه رو، دویه دو

متقابل به رأس هستند، یعنی در شکل مقابل زاویه

های ۱ و ۲ متقابل به رأس هستند. زاویه های ۳ و

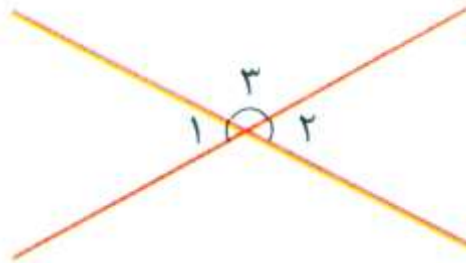
۴ نیز متقابل به رأس هستند.

دو زاویه ی متقابل به رأس با هم برابرند، یعنی در

شکل بالا:

$$\hat{1} = \hat{3} , \quad \hat{2} = \hat{4}$$

مثال: در شکل مقابل مجموع ۱ و ۲ مساوی ۶۰ درجه است. اندازه ی زاویه ی ۳ چند درجه است؟



پاسخ:

$$۱۸۰^{\circ} - ۳۰^{\circ} = ۱۵۰^{\circ} \leftarrow \text{اندازه ی } \hat{2} \text{ و } \hat{4}$$

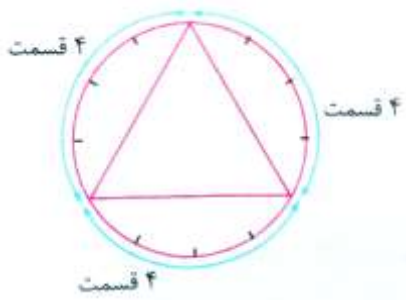
$$۶۰^{\circ} \div ۲ = ۳۰^{\circ} \leftarrow \text{اندازه ی } \hat{1} \text{ و } \hat{3}$$

دایره ی شکل مقابل، به شش قسمت مساوی یا به شش کمان مساوی تقسیم شده است. اگر نقطه های کنار

هم روی دایره را به هم وصل کنیم، شش پاره خط به وجود آمده نیز مساوی اند، یعنی پاره خط های مربوط

به کمان های مساوی، با هم برابرند.





مثال: دایره ی شکل مقابل به ۱۲ قسمت مساوی تقسیم شده است. اگر بخواهیم یک مثلث متساوی الاضلاع داخل دایره رسم کنیم، چون مثلث متساوی الاضلاع ۳ ضلع برابر دارد، پس باید دایره به ۳ قسمت برابر تقسیم شود.

$$۱۲ \div ۳ = ۴$$

تعداد قسمت ها

انواع زاویه ۲

در سال های قبل با انواع زاویه آشنا شده اید که در این قسمت آن ها را یادآوری می کنیم.

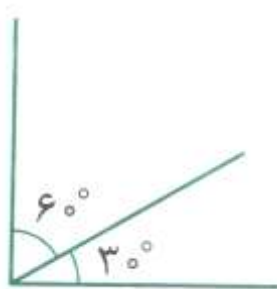


نکته:

- ۱- زاویه ی تند از زاویه ی راست (قائمه) کوچک تر است.
- ۲- زاویه ی باز از زاویه ی راست بزرگ تر و از زاویه ی نیم صفحه (۱۸۰ درجه) کوچک تر است.
- ۳- زاویه ی نیم صفحه < زاویه ی باز < زاویه ی راست < زاویه ی تند

دو زاویه ی متمم

به هر دو زاویه ای که مجموع آن ها ۹۰ درجه باشد، دو زاویه متمم می گویند. به طور مثال دو زاویه ی ۳۰ درجه و ۶۰ درجه متمم یک دیگر هستند.



مثال ۱: متمم زاویه ۳۷ درجه را حساب کنید.

چون مجموع دو زاویه ی متمم ۹۰ درجه است، بنابراین با انجام تفریق زیر می توانیم زاویه ی ۳۷ درجه را

$$۳۷^\circ \text{ متمم زاویه } = ۹۰^\circ - ۳۷^\circ = ۵۳^\circ$$

پیدا کنیم.

مثال ۲: دو زاویه ی متمم مشخص کنید که اندازه ی یکی از آن ها ۵ برابر دیگری باشد.

با توجه به این که اندازه ی یکی از زاویه ها، پنج برابر دیگری است لذا در ابتدا باید ۹۰ درجه را به ۶ قسمت مساوی تقسیم کنیم تا اندازه ی زاویه کوچک تر به دست آید.

$$\begin{aligned} \text{اندازه ی زاویه کوچک تر } ۱۵^\circ &= ۹۰^\circ \div ۶ \\ \text{اندازه ی زاویه بزرگ تر } ۷۵^\circ &= ۱۵^\circ \times ۵ \end{aligned}$$

دو زاویه ی مکمل

به هر دو زاویه که مجموع آن ها ۱۸۰ درجه باشد، دو زاویه ی مکمل می گویند. به طور مثال دو زاویه ی ۳۰ درجه و ۱۵۰ درجه مکمل یک دیگر هستند.



مثال ۳: مکمل زاویه ی ۳۷ درجه را حساب کنید.

چون مجموع دو زاویه مکمل ۱۸۰ درجه است، بنابراین با انجام تفریق زیر می توانیم مکمل زاویه ی ۳۷ درجه

$$۳۷^\circ \text{ مکمل زاویه ی } = ۱۸۰^\circ - ۳۷^\circ = ۱۴۳^\circ$$

را پیدا کنیم.

مثال ۴: دو زاویه ی مکمل مشخص کنید که اندازه ی یکی از آن ها پنج برابر دیگری باشد.

چون اندازه ی یکی از زاویه های مکمل، پنج برابر دیگری است لذا در ابتدا باید ۱۸۰ درجه را بر ۶ قسمت مساوی تقسیم کنیم تا اندازه ی زاویه ی کوچک تر به دست آید.

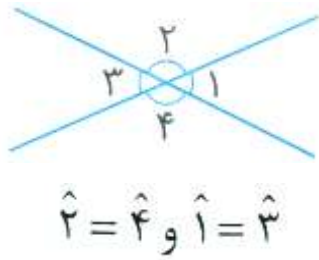
$$۱۸۰^\circ \div ۶ = ۳۰^\circ \rightarrow \text{اندازه ی زاویه کوچک تر} \quad ۱۵^\circ = ۳۰^\circ \times ۵ = \text{اندازه ی زاویه بزرگ تر}$$

نکته: اختلاف متمم و مکمل هر زاویه ای برابر ۹۰ درجه است. به طور مثال متمم زاویه ی ۳۰ درجه برابر ۶۰

$$۱۵۰ - ۶۰ = ۹۰$$

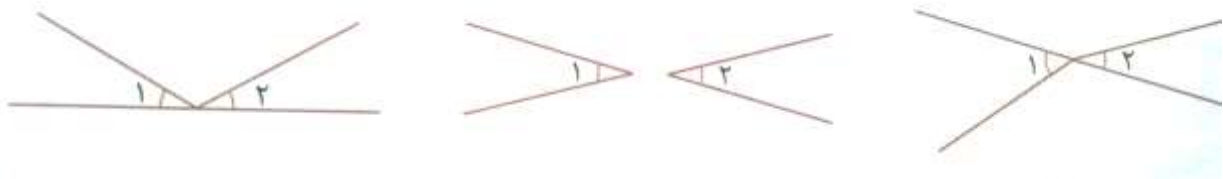
و مکمل این زاویه برابر ۱۵۰ درجه است و داریم:

دو زاویه ی متقابل به رأس



اگر دو خط هم دیگر را قطع کنند، چهار زاویه به وجود می آید که زاویه های روبه رو دو به دو با هم برابر هستند. به این زاویه ها متقابل به رأس می گویند. توجه داشته باشید که در زاویه های متقابل به رأس، ضلع ها باید در امتداد یک دیگر باشند.

با توجه به این که دو زاویه ی متقابل به رأس باید هم رأس باشند و همچنین اضلاع دو زاویه ی متقابل به رأس باید در امتداد یک دیگر باشد لذا در شکل های زیر زاویه ی متقابل به رأس وجود ندارد.



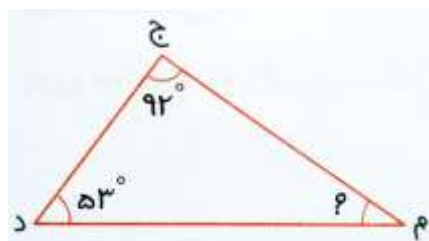
مثال ۵: مجموع دو زاویه ی متقابل به رأس ۶۴ درجه است. اندازه ی هر یک از آن ها چند درجه است؟
با توجه به این که دو زاویه ی متقابل به رأس با هم برابرند، بنابراین:

$$\text{اندازه ی هر یک از زاویه ها} = 64 \div 2 = 32^\circ$$

یادآوری

نکته: مجموع زاویه های داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است.

مثال ۶: در شکل زیر اندازه ی زاویه ی «م» چند درجه است؟



می دانیم که مجموع همه ی زاویه های داخلی این مثلث باید ۱۸۰ درجه باشد، بنابراین:

$$\text{اندازه ی زاویه ی «م»} = 180^\circ - (92^\circ + 53^\circ) = 180^\circ - 145^\circ = 35^\circ$$

مریم عزیزی

فصل ششم - تناسب و درصد

درس اول : کسر، نسبت و تناسب

نسبت، مقایسه ی بین دو چیز مختلف است. برای مثال اگر نسبت نیمکت ها به دانش آموزان در یک کلاس ۱ به ۲ باشد، یعنی روی یک نیمکت ۲ نفر می نشینند. این نسبت را به صورت زیر در جدول قرار می دهیم و به صورت های « ۱ به ۲ » یا « ۱ و ۲ » یا « ۲ : ۱ » یا $\frac{1}{2}$ نمایش می دهیم.

نیمکت	۱
دانش آموز	۲

مثال: با توجه به شکل های زیر، هر یک از جدول نسبت ها را کامل کنید.

	<table> <tr> <td>تعداد دایره ها</td><td>۲</td></tr> <tr> <td>تعداد مثلث ها</td><td>۳</td></tr> <tr> <td>تعداد مربع ها</td><td>۵</td></tr> </table>	تعداد دایره ها	۲	تعداد مثلث ها	۳	تعداد مربع ها	۵
تعداد دایره ها	۲						
تعداد مثلث ها	۳						
تعداد مربع ها	۵						
	<table> <tr> <td>تعداد چوب گیریت ها</td><td>۹</td></tr> <tr> <td>تعداد صندلی ها</td><td>۳</td></tr> </table>	تعداد چوب گیریت ها	۹	تعداد صندلی ها	۳		
تعداد چوب گیریت ها	۹						
تعداد صندلی ها	۳						

نکته: همان طور که صورت و مخرج کسری را در عددی ضرب می کنیم و کسری مساوی کسر اولیه به دست می آید، اگر نسبت ها را نیز در عددی ضرب کنیم، تغییر نمی کنند و نسبت های حاصل با نسبت های اولیه برابرند؛ یعنی نسبت ۲ به ۳ با نسبت ۴ به ۶ برابر است.

مثال: نسبت پول رضا، احمد و پرهام، مانند $\frac{1}{3}$ ، $\frac{2}{3}$ و $\frac{5}{6}$ است. نسبت ها را به صورت عدد صحیح بیان کنید.

پاسخ: هر سه عدد را در کوچک ترین مخرج مشترک آن ها (عدد ۶) ضرب می کنیم.

$$\text{پرهام: } \frac{5}{6} \times \frac{6}{6} = 5 \quad \text{احمد: } \frac{2}{3} \times \frac{6}{6} = 4 \quad \text{رضا: } \frac{1}{3} \times \frac{6}{6} = 2$$

یعنی نسبت پول رضا، احمد و پرهام مانند ۲ به ۴ به ۵ است.

نکته: در مسئله های مربوط به نسبت، ترتیب مهم است؛ یعنی وقتی که می گوییم نسبت سن آرش به روزمهر ۳ به ۵ است، یعنی عدد ۳ مربوط به سن آرش و عدد ۵ مربوط به سن روزمهر است.

گاهی نسبت های بین چند مقدار به طور واضح بیان نمی شود که در این صورت باید نسبت بین عامل مشترک ان ها را یکسان کنیم تا بتوانیم نسبت هر یک از عامل های داده شده را تشخیص دهیم.

مثال: نسبت سن پرهام به سعید ۳ به ۵ و نسبت سن سعید به سارا ۲ به ۷ است. نسبت سن پرهام به سارا را بیابید.

پاسخ: دقت کنید که در این مسئله، نسبت سن پرهام به سارا واضح نیست و سعید در هر دو نسبت مشترک است؛ پس باید نسبت سن سعید در هر دو حالت به یک عدد تبدیل شود، یعنی نسبت سن پرهام به سارا، مانند ۶ به ۳۵ است.

پرهام	3×2		۶
سعید	5×2	2×5	۱۰
سارا		7×5	۳۵

هرگاه تغییرات دو مقدار به صورتی باشد که نسبت (حاصل تقسیم) آن ها مقدار ثابتی باشد، به آن دو مقدار، مقدارهای متناسب می گوییم.

مثال: نسبت طول یک ضلع مربع به محیط آن، همواره ثابت و مساوی $\frac{1}{4}$ است؛ پس می گوییم طول ضلع یک مربع با محیط آن متناسب است. به جدول زیر دقت کنید.

ضلع مربع	۳	۵	۷	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	۱۷
محیط مربع	12	20	28	۲	$\frac{1}{2}$	۶۸
مساحت مربع	۹	۲۵	۴۹	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{16}$	۲۸۹

همان طور که در جدول می بینید، اندازه ی ضلع مربع با مساحت آن متناسب نیست؛ یعنی نسبت آن ثابت نیست.

تناسب

دو نسبت مساوی، یک تناسب را تشکیل می دهند. حاصل تناسب، یعنی یافتن مقدار مجهول در دو نسبت مساوی؛ یعنی اگر یکی از عددها در تناسب مشخص نباشد، مقدار آن را بیابیم.

جدولی که تناسب را نمایش می دهد، جدول تناسب نامیده می شود.

مثال: در تساوی مقابل، در جای خالی چه عددی را باید قرار داد؟

۳	
۵	۲۵

پاسخ:

روش ۲

۳	
۵	۲۵

→ $\frac{5}{1} \times \frac{3}{5} = 15$

روش ۱

۳	۱۵
۵	۲۵

×۵ (از ۳ به ۱۵) و ×۵ (از ۵ به ۲۵)

تناسب را به صورت دو کسر مساوی نیز نشان می دهند. برای مثال جدول تناسب

۳	۹
۴	۱۲

را به صورت $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ نیز نشان می دهند.

تسهیم به نسبت یعنی تقسیم کردن به نسبت سهم هر چیزی یا هر کسی از کل سهم. برای مثال وقتی که می گوییم می خواهیم ۵۰ تومان را نسبت ۲ به ۳ بین علی و رضا تقسیم کنیم، یعنی می خواهیم این پول را طوری تقسیم کنیم که از ۵ قسمت کل پول، ۲ قسمت به علی و ۳ قسمت به رضا برسد. این طوری:

$$(2 + 3 = 5)$$

نسبت سهم رضا نسبت سهم علی

مثال: احمد ۲۸ عدد پیچ و مهره دارد. نسبت پیچ ها به مهره های او $\frac{۲}{۵}$ است؛ او چند پیچ و چند مهره دارد؟
 پاسخ: عدد ۲۸، نه تعداد پیچ ها است و نه تعداد مهره ها، بلکه مجموع تعداد پیچ ها و مهره ها است، بنابراین باید مجموع نسبت ها را حساب کنیم.

پیچ	۲	۸
مهره	۵	۲۰
کل (مجموع)	۷	۲۸

↗
×۴

یعنی احمد ۸ پیچ و ۲۰ مهره دارد.

کسر، نسبت و تناسب ۲

نسبت

اگر بخواهیم در ریاضیات رابطه ی بین دو چیز یا دو عدد را نشان دهیم از نسبت استفاده می کنیم. به طور مثال هر موتورسیکلت دارای دو چرخ است، بنابراین دو موتورسیکلت دارای چهار چرخ است و سه موتورسیکلت دارای شش چرخ می باشند به این ترتیب می توان گفت که نسبت تعداد موتورسیکلت ها به تعداد چرخ ها ۱ به ۲ است که این نسبت را به صورت کسر با $\frac{1}{2}$ و به صورت اعشاری با 0.5 هم نمایش می دهند. البته در بعضی از کتاب ها نسبت ۱ به ۲ را به صورت های (۱ و ۲) و همچنین (۲:۱) هم نمایش می دهند. دقت داشته باشید که نسبت $\frac{1}{2}$ را به صورت کسری نخوانید، بلکه آن را به صورت (۱ به ۲) و یا (۱ و ۲) بخوانید.

$$\frac{\text{تعداد موتورسیکلت}}{\text{تعداد چرخ}} = \frac{1}{2} \quad \text{نسبت تعداد موتورسیکلت ها به تعداد چرخ ها}$$

نکته:

۱- نسبت واحد ندارد اما باید دقت کنیم که در هر نسبت، صورت و مخرج را بر حسب یک واحد معین بنویسیم.

۲- صورت و مخرج هر نسبت را می توان ساده کرد.

مثال ۱: قد علی ۱۷۵ سانتی متر است و قد مهدی $\frac{1}{5}$ متر است. نسبت قد علی به قد مهدی چه قدر است؟
با توجه به این که قد مهدی بر حسب متر بیان شده است، ابتدا قد او را بر حسب سانتی متر بیان می کنیم، چون هر متر معادل صد سانتی متر است، پس قد مهدی $150 = \frac{1}{5} \times 100$ سانتی متر می شود. بنابراین؛ در برخی از مسائل صورت یا مخرج و یا هر دوی آن ها را به صورت کسری می دهند که برای ساده تر شدن نسبت باید صورت نسبت را بر مخرج آن تقسیم کنیم.

$$\frac{\text{قد علی}}{\text{قد مهدی}} = \frac{175}{1/5 \times 100} = \frac{175}{150} = \frac{7}{6}$$

(همچنین می توان با افزودن ۲۵ به صورت و مخرج، کسر را ساده کرد: $\frac{175+25}{150+25} = \frac{200}{175} = \frac{8}{7}$ ، اما در اینجا به سادگی کسر را به $\frac{7}{6}$ رساندیم)

مثال ۲: نسبت سن سارا به سن مینا مثل $\frac{14}{15}$ به $\frac{7}{10}$ است. نسبت سن این دو نفر را به ساده ترین شکل بیان کنید.

$$\frac{\text{سن سارا}}{\text{سن مینا}} = \frac{14}{15} \div \frac{7}{10} = \frac{14}{15} \times \frac{10}{7} = \frac{4}{3}$$

نسبت $\frac{4}{3}$ ساده ترین شکل بیان نسبت سن این دو نفر است.

مقدارهای متناسب و جدول تناسب

هرگاه دو نسبت با هم مساوی باشند، می‌گوییم که این دو نسبت با هم دیگر متناسب هستند. به طور مثال با توجه به جدول زیر نسبت طول ضلع هر مربع به محیط آن $\frac{1}{4}$ است و با کم تر یا بیش تر شدن ضلع مربع، محیط هم به همان نسبت تغییر می‌کند، یعنی اگر طول ضلع را دو برابر کنیم، محیط هم دو برابر می‌شود و یا اگر محیط را ۲۰ برابر کنیم، طول ضلع هم ۲۰ برابر می‌شود. پس محیط مربع با طول ضلع آن متناسب است و یا به عبارت دیگر طول ضلع مربع با محیط آن تناسب دارد. به این جدول که تناسب را نشان می‌دهد، جدول تناسب می‌گوییم.

طول مربع	۱	۲	۳	۴	۱۵	۲۰	۸۰
محیط مربع	۴	۸	۱۲	۱۶	۶۰	۸۰	۳۲۰

در حل برخی مسائل می‌توانیم از جدول تناسب استفاده کنیم و جواب مسئله را به دست آوریم.

مثال ۳: اگر نسبت ۷ به ۱۱ مانند نسو به ۷۷ باشد، داخل دایره چه عددی باید بنویسیم؟

برای حل سؤال از جدول تناسب مقابل استفاده می کنیم، چون ۱۱ را هفت برابر کردیم تا حاصل ۷۷ شود پس باید ۷ را هم هفت برابر کنیم، بنابراین؛

۷	○
۱۱	۷۷

$\times 7$

$$\bigcirc = 7 \times 7 = 49$$

حل جدول تناسب

اگر مانند مثال قبل نتوانیم، چند برابر شدن عددها را تشخیص دهیم، بهتر است که از روش زیر که به روش طرفین وسطین معروف می باشد کمک بگیریم. در جدول مقابل به عددهای ۷ و ۷۷، طرفین و به ۱۱ و هم وسطین گفته می شود. در هر جدول تناسب همواره حاصل ضرب طرفین با حاصل ضرب وسطین برابر است. بنابراین برای پیدا کردن عدد داخل کافی است که حاصل ضرب طرفین را بر عدد ۱۱ تقسیم کنیم:

۷	○
۱۱	۷۷

$\times 7$

$$\Rightarrow \bigcirc = \frac{7 \times \cancel{77}^7}{\cancel{11}_1} = 49$$

تسهیم به نسبت

تسهیم به نسبت یعنی سهیم بودن در نسبت، به عبارت دیگر تسهیم به نسبت یعنی مشخص کردن سهم هر چیزی به نسبت معین از کل سهم ها. به طور مثال در یک کلاس نسبت دانش آموزانی که به فوتبال علاقه مند هستند به دانش آموزانی که به والیبال علاقه مندند $\frac{5}{3}$ است، پس نسبت دانش آموزانی که به فوتبال علاقه مندند به کل دانش آموزان $\frac{5}{5+3} = \frac{5}{8}$ است. همچنین نسبت دانش آموزانی که به والیبال علاقه مندند به کل دانش آموزان $\frac{3}{5+3} = \frac{3}{8}$ است. البته به شرط این که این نسبت مربوط به کل دانش آموزان باشد و هر دانش آموز حتما به یکی از این دو ورزش علاقه مند باشد.

مثال ۴: حاج رحیم و مشهدی سلیمان زمینی را به نسبت ۳ به ۷ شخم زدند. اگر کدخدا رجب (صاحب زمین) بخواهد ۵۰۰۰۰ تومان را بین آن ها تقسیم کند، سهم هر یک چه قدر می شود؟ ابتدا جمع نسبت ها را حساب کرده و سپس با کمک جدول تناسب زیر، سهم هر کدام را از مبلغ ۵۰۰۰۰ تومان مشخص می کنیم.

سهم حاج رحیم	۳	○	$\Rightarrow \bigcirc = 3 \times 50000 = 150000$
سهم مشهدی سلیمان	۷	□	$\Rightarrow \square = 7 \times 50000 = 350000$
سهم کل	۱۰	۵۰۰۰۰	

$\times 50000$

$$۱۰ = ۳ + ۷ = \text{جمع نسبت ها}$$

مثال ۵: یک نقاش ساختمان، برای تهیه ی رنگ سبز، هر ۵ کیلوگرم رنگ زرد را با ۳ کیلوگرم رنگ آبی مخلوط می کند. او برای تهیه ۳۲ کیلو گرم رنگ سبز، به چند کیلوگرم از هر رنگ نیاز دارد؟

$$۸ = ۵ + ۳ = \text{مجموع نسبت ها}$$

رنگ زرد	۵	○	$\Rightarrow \bigcirc = 5 \times 4 = 20$
رنگ آبی	۳	□	$\Rightarrow \square = 3 \times 4 = 12$
رنگ سبز	۸	۳۲	

$\times 4$

یعنی اگر ۵ کیلوگرم رنگ زرد را با ۳ کیلوگرم رنگ آبی مخلوط کنیم، ۸ کیلوگرم رنگ سبز به دست می آید.

مقایسه ی نسبت ها

برای مقایسه چند نسبت ابتدا هر نسبت را به صورت یک کسر می نویسیم و سپس آن ها را مانند مقایسه ی کسرها، از روش مخرج مشترک گیری و یا روش های دیگر مقایسه می کنیم.

مثال ۶: در ۲ کیلوگرم از یک نوع شیرینی، ۵۰۰ گرم شکر و در ۳ کیلوگرم از نوع دیگری شیرینی، ۷۰۰ گرم شکر به کار رفته است. کدام نوع شیرینی، شکر بیش تری دارد؟ ابتدا نسبت شکر به شیرینی را در هر دو نوع شیرینی مشخص می کنیم، سپس کسره های حاصل را با هم مقایسه می کنیم.

$$\begin{aligned} \text{شیرینی نوع اول: } \frac{\text{مقدار شکر}}{\text{کل شیرینی}} &= \frac{500 \text{ گرم}}{2 \times 1000 \text{ گرم}} = \frac{500}{2000} = \frac{1}{4} \xrightarrow[\times 15]{\text{صورت و مخرج}} \frac{1}{4} = \frac{15}{60} \\ \text{شیرینی نوع دوم: } \frac{\text{مقدار شکر}}{\text{کل شیرینی}} &= \frac{700 \text{ گرم}}{3 \times 1000 \text{ گرم}} = \frac{700}{3000} = \frac{7}{30} \xrightarrow[\times 2]{\text{صورت و مخرج}} \frac{7}{30} = \frac{14}{60} \end{aligned}$$

با مقایسه $\frac{15}{60}$ و $\frac{14}{60}$ نتیجه می شود که شیرینی نوع اول دارای شکر بیش تری است.

درس دوم – درصد

نسبت یا کسری که مخرج آن ۱۰۰ باشد، نشان دهنده ی درصد است. برای مثال، کسری $\frac{57}{100}$ را به صورت ۵۷٪ نشان می دهیم و می خوانیم: پنجاه و هفت درصد

وقتی که می گوئیم شیر با چربی ۴٪، یعنی در هر ۱۰۰ گرم از این شیر، ۴ گرم چربی است یا در ۱۰۰ کیلوگرم از این شیر، ۴ کیلوگرم چربی است.

اگر بخواهیم کسری را به صورت درصد بنویسیم، باید کسری مساوی با آن و با مخرج ۱۰۰ پیدا کنیم.

مثال: کسره های مقابل را به صورت درصد بنویسید.

$$\frac{3}{5} \text{ و } \frac{1}{4} \text{ و } \frac{14}{25}$$

پاسخ:

$$\begin{aligned} \frac{3}{5} &\xrightarrow[\times 20]{\times 20} \frac{60}{100} = 60\% \\ \frac{1}{4} &\xrightarrow[\times 25]{\times 25} \frac{25}{100} = 25\% \\ \frac{14}{25} &\xrightarrow[\times 4]{\times 4} \frac{56}{100} = 56\% \end{aligned}$$

اگر بخواهیم کسری را به صورت درصد بنویسیم، اما نتوانیم مخرج آن را به سادگی با ضرب کردن در یک عدد به ۱۰۰ تبدیل کنیم، ابتدا صورت کسر را بر مخرجش تقسیم کرده و به صورت عدد اعشاری و سپس به شکل درصد می نویسیم.

دقت کنید: ۰/۲۶ یعنی ۲۶٪، ۰/۷ یعنی ۷۰٪، ۰/۷۰ یعنی ۷۰٪.

خیلی دقت کنید: ۰/۱۲۵ یعنی ۱۲/۵٪، ۰/۸۷۵ یعنی ۸۷/۵٪.

مثال: کسر $\frac{3}{8}$ را به صورت درصد بنویسید.

پاسخ: مخرج کسر باید ۱۰۰ باشد تا بتوانیم به صورت درصد بنویسیم.

$$\frac{3}{8} = 3 \div 8 = 0/375 = \frac{375}{1000} = \frac{37/5}{100} = 37/5\%.$$

مثال: کسر $\frac{147}{500}$ را به صورت درصد بنویسید.

پاسخ: توجه کنید که مخرج کسر باید ۱۰۰ باشد تا بتوانیم به صورت درصد بنویسیم.

$$\frac{147}{500} = \frac{294}{1000} = \frac{29/4}{100} = 29/4\%.$$

کسرها یا عددهای بزرگ تر از واحد را نیز می توان به صورت درصد نوشت. به مثال های زیر دقت کنید.

مثال: عددهای مقابل را به صورت درصد بنویسید.

پاسخ: $\frac{3}{4}$ و $\frac{7}{5}$

$$\frac{7}{5} = \frac{140}{100} = 140\% \quad \frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 75\%$$

دقت کنید: ۵/۷۶ یعنی ۵۷۶٪، ۲/۳ یعنی ۲۳۰٪، ۲/۳۰ یعنی ۲۳۰٪.

دقت کنید: دو برابر یعنی ۲۰۰٪، سه برابر یعنی ۳۰۰٪، هفت برابر یعنی ۷۰۰٪.

کل هر چیزی را ۱۰٪ در نظر می گیریم، یعنی وقتی می گوییم کل دانش آموزان یک کلاس به اردو می روند، یعنی ۱۰٪ دانش آموزان یک کلاس به اردو می روند یا وقتی می گوییم مبلغ کالایی ۷۰۰۰ تومان است، یعنی ۱۰٪ مبلغ کالا ۷۰۰۰ تومان است.

مثال: ۳۰٪ دانش آموزان کلاسی به مسابقه ی فوتبال رفته اند، چند درصد به مسابقه ی فوتبال نرفته اند؟
پاسخ: کل دانش آموزان کلاس ۱۰۰٪ است.

به مسابقه ی فوتبال نرفته اند $۱۰۰\% - ۳۰\% = ۷۰\%$

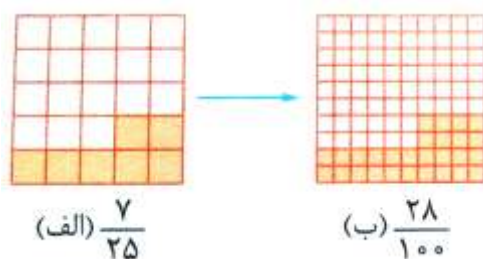
مثال: فروشنده ای، برای فروش کالایش ۲۰٪ تخفیف می دهد، یعنی چند درصد آن را باید بپردازیم؟
پاسخ: کل مبلغ کالا ۱۰۰٪ است.

باید بپردازیم $۱۰۰\% - ۲۰\% = ۸۰\%$

توجه کنید که ۲۰٪ مبلغ کالا را تخفیف می دهد، یعنی ۲۰٪ قیمت کالا گرفته نمی شود.

درصد ۲

به شکل (الف) که به ۲۵ قسمت مساوی تقسیم شده است دقت کنید. در این شکل ۷ قسمت رنگ شده است، پس $\frac{۷}{۲۵}$ شکل (الف) رنگی است. حال اگر همان شکل را به ۱۰۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم و به همان اندازه مانند شکل (الف) رنگ کنیم، ملاحظه می کنید که $\frac{۲۸}{۱۰۰}$ شکل (ب) رنگ شده است. این دو کسر نمایش مختلفی از یک چیز هستند در ضمن می توانیم $\frac{۲۸}{۱۰۰}$ را به صورت ۲۸٪ (می خوانیم ۲۸ درصد) هم نمایش دهیم.



$$\frac{۷}{۲۵} = \frac{۲۸}{۱۰۰} = ۲۸\%$$

درصد

نسبتی که مخرج آن عدد ۱۰۰ باشد، درصد نامیده می شود. به طور مثال اگر در نوعی گز (سوغاتی اصفهان) ۳۵ گرم از هر ۱۰۰ گرم پسته باشد در اصطلاح به آن گز ۳۵ درصد و یا ۳۵٪ گفته می شود.

نکته:

۱- در صورتی که کسری بزرگ تر از واحد باشد، درصد آن بیش تر از ۱۰۰ خواهد شد.

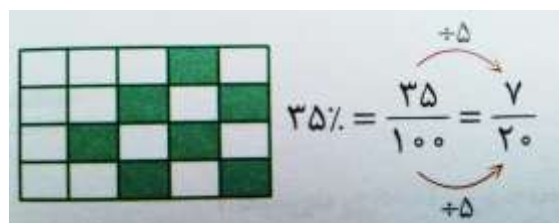
۲- مقایسه ی درصد از مقایسه ی کسرها ساده تر است.

از درصد برای درک بهتر از نسبت ها و یا کسرها استفاده می کنیم. به این ترتیب که آن نسبت و یا کسر را به صورت کسری با مخرج ۱۰۰ تبدیل می کنیم و سپس آن را به صورت درصد می نویسیم. به طور مثال کسر $\frac{۳}{۴}$ را می توان به صورت $\frac{۳ \times ۲۵}{۴ \times ۲۵} = \frac{۱۵}{۱۰۰}$ یعنی ۱۵٪ نشان دهیم. بنابراین برای تبدیل و نمایش هر عدد کسری به شکل درصد کافی است که کسری مساوی با آن کسر، با مخرج ۱۰۰ پیدا کنیم. حال اگر در یک کسر نتوانیم کسر مساوی با مخرج ۱۰۰ پیدا کنیم. حال اگر در یک کسر نتوانیم کسر مساوی با مخرج ۱۰۰ پیدا کنیم بهتر است که تقسیم صورت بر مخرج کسر را تا دو رقم اعشار حساب کنیم و درصد آن عدد را به صورت تقریبی به دست بیاوریم. مثلاً در کسر $\frac{۵}{۷}$:

$$\frac{۵}{۷} = ۵ \div ۷ \xrightarrow[\text{ماشین حساب}]{\text{استفاده از}} ۰/۷۱۴۲۸۵۷۱۴ \approx ۰/۷۱ = \frac{۷۱}{۱۰۰} = ۷۱\%$$

نمایش درصد روی یک شکل

برای نمایش هر درصدی روی یک شکل ابتدا درصد را به شکل کسری نوشته و آن را تا جای ممکن ساده می کنیم به این ترتیب به کسری می رسیم که با نمایش آن روی شکل داده شده، درصد آن نیز مشخص می شود. به طور مثال اگر بخواهیم ۳۵ درصد یک مستطیل را نشان دهیم، ابتدا ۳۵٪ را به صورت $\frac{۳۵}{۱۰۰}$ می نویسیم و آن را ساده می کنیم تا به کسر $\frac{۷}{۲۰}$ برسیم، حالا این کسر را روی یک مستطیل نشان می دهیم.



برای حل مسئله های درصد می توانیم از جدول تناسب استفاده کنیم. به مثال های زیر دقت کنید.

مثال ۱: در یک کارگاه تولید قطعات اتومبیل، ۴ درصد از محصولات معیوب هستند. اگر در این کارگاه و در یک روز ۵۵۰ قطعه تولید شود، چند تا از قطعات معیوب هستند؟

کل قطعات تولید شده (یعنی ۵۵۰) را به عنوان ۱۰۰٪ در نظر گرفته و با کمک جدول تناسب، جواب را به دست می آوریم.

۵۵۰	۱۰۰
?	۴

$$\Rightarrow ? = \frac{۵۵۰ \times ۴}{۱۰۰} = ۲۲$$

مثال ۲: برای تهیه ی نوعی دارو سه ماده ی شیمیایی را به نسبت ۵، ۴ و ۱ مخلوط می کنند. در داروی به دست آمده چند درصد از هر نوع ماده وجود دارد؟ در هر ۸۰ گرم از این دارو چند گرم از هر ماده وجود دارد؟ برای حل سؤال از جدول تناسب زیر استفاده می کنیم؛

مقدار در ۸۰ گرم درصد

ماده ی نوع ۱	۵	$۵ \times ۱۰ = ۵۰$	$۵ \times ۸ = ۴۰$
ماده ی نوع ۲	۴	$۴ \times ۱۰ = ۴۰$	$۴ \times ۸ = ۳۲$
ماده ی نوع ۳	۱	$۱ \times ۱۰ = ۱۰$	$۱ \times ۸ = ۸$
دارو	۱۰	۱۰۰	۸۰

$\xrightarrow{\times ۱۰}$ $\xrightarrow{\times ۸}$

مثال ۳: عددی را هفت برابر کرده ایم.

الف) عدد جدید چند درصد عدد اولیه است؟

عدد	۱۰۰
۷ برابر عدد	?

$$\Rightarrow ? = ۱۰۰ \times ۷ = ۷۰۰\%$$

ب) عدد اولیه چند درصد افزایش پیدا کرده است؟

افزایش $۷۰۰\% - ۱۰۰\% = ۶۰۰\%$

درس سوم – کاربرد درصد در محاسبات مالی

در محاسبات مالی همیشه درصد قیمت اصلی کالا یا قیمت اولیه 100% در نظر گرفته می شود

درصد مالیات و درصد سود، همیشه به درصد قیمت اصلی کالا اضافه می شوند و قیمت کالا را افزایش می دهند.

مثال: قیمت کالایی 20000 تومان است. اگر 5% مالیات بر این کالا تعلق بگیرد، خریدار برای خرید این کالا چند تومان باید بپردازد؟

پاسخ:

درصد خرید کالا با مالیات $100\% + 5\% = 105\%$

قیمت با مالیات	۱۰۵	۲۱۰۰۰	تومان
قیمت اولیه	۱۰۰	۲۰۰۰۰	

قیمت کالا با مالیات 21000 تومان است.

مثال: فروشنده ای کالایی را به قیمت 5000 تومان خرید. اگر او کالا را با 30% سود قیمت گذاری کند، قیمت فروش کالا چند تومان است؟

پاسخ:

درصد مبلغ فروش کالا $100\% + 30\% = 130\%$

قیمت با سود	۱۳۰	۶۵۰۰	
قیمت اولیه	۱۰۰	۵۰۰۰	

قیمت فروش کالا 6500 تومان است.

درصد تخفیف، همواره از درصد قیمت اصلی (یعنی 100%) کم می شود و قیمت کالا را کاهش می دهد.

مثال: فروشنده ای، کتابی را با 10% تخفیف می فروشد. اگر قیمت اولیه ی کالا 4800 تومان باشد، خریدار برای خرید این کالا چند تومان باید بپردازد؟

پاسخ:

درصد بعد از تخفیف یا درصد پرداخت $100\% - 10\% = 90\%$

قیمت با تخفیف	۹۰	۴۳۲۰	تومان
قیمت اصلی	۱۰۰	۴۸۰۰	

قیمت کالا پس از تخفیف ۴۳۲۰ تومان است.

مثال: سال گذشته قیمت کالایی ۴۰۰۰ تومان بوده و امسال همان کالا ۱۰۰۰۰ تومان شده است. قیمت این کالا چند درصد افزایش داشته است؟

پاسخ:

قیمت امسال	۱۰۰۰۰	۲۵۰	درصد قیمت کالا نسبت به سال گذشته ۲۵٪ است
قیمت سال گذشته	۴۰۰۰	۱۰۰	$25\% - 10\% = 15\%$

درصد افزایش قیمت $25\% - 10\% = 15\%$

کاربرد درصد در محاسبات مالی ۲

تخفیف

منظور از تخفیف روی یک کالا این است که مبلغی از کل قیمت کالا را پرداخت نکنیم. به طور مثال اگر قیمت کالایی ۵۰۰۰ تومان باشد و آن را با ۱۵٪ تخفیف خریداری کنیم، آن گاه باید مبلغ ۴۲۵۰ تومان را جهت خرید این کالا پرداخت کنیم. به روش های زیر برای محاسبه ی این مبلغ دقت کنید.

روش اول: با استفاده از جدول تناسب ۱۵٪ قیمت کالا را حساب کنیم و عدد حاصل را از قیمت اصلی کم کنیم.

قیمت فروش	۱۰۰	۵۰۰۰
مقدار تخفیف	۱۵	?

$$\Rightarrow ? = \frac{15 \times 5000}{100} = 750 \text{ مبلغ تخفیف}$$

$$\rightarrow \text{مبلغ پرداختی} = 5000 - 750 = 4250$$

روش دوم: ۱۵٪ از ۱۰۰٪ را تخفیف می گیریم پس $100\% - 15\% = 85\%$ از قیمت این کالا را پرداخت می کنیم. از طرفی ۸۵٪ همان ۰/۸۵ است، بنابراین:

$$\text{مبلغ پرداختی} = 5000 \times 0/85 = 4250 \text{ یا } 5000 \times \frac{85}{100} = 4250$$

در بعضی از مسئله ها مقدار تخفیف و مبلغ پرداختی مشخص است و می خواهند قیمت اولیه را مشخص کنیم. به مثال زیر دقت کنید.

مثال ۱: قیمت کالایی پس از تخفیف ۲۰ درصدی، ۵۶۰۰ تومان شده است. قیمت اولیه این کالا چه قدر بوده است؟

روش اول: وقتی ۲۰٪ از قیمت کالا را تخفیف گرفته ایم یعنی $100\% - 20\% = 80\%$ قیمت آن را پرداخت کرده ایم، پس ۵۶۰۰ تومان همان ۸۰٪ قیمت کل است. بنابراین برای تعیین قیمت اولیه یا کل از جدول تناسب زیر کمک می گیریم:

مبلغ پرداختی	۸۰	۵۶۰۰
قیمت اصلی	۱۰۰	?

$$\Rightarrow ? = \frac{100 \times 5600}{80} = 7000 \text{ قیمت اولیه کالا}$$

روش دوم: همان طور که گفتیم ۸۰٪ همان ۵۶۰۰ تومان است، از طرفی ۸۰٪ همان ۰/۸ می باشد، بنابراین:

$$\text{قیمت کل (اولیه)} = 5600 \div 0.8 = 5600 \times \frac{10}{8} = 7000$$

در بعضی از مسئله ها قیمت اولیه و مبلغ پرداختی مشخص است و می خواهند تا مقدار تخفیف را مشخص کنیم. به مثال زیر دقت کنید.

مثال ۲: قیمت کالایی ۸۰۰۰ تومان بود، اما فروشنده آن را به مبلغ ۷۲۰۰ تومان فروخت. او چند درصد تخفیف داده است؟ فروشنده ۷۲۰۰ - ۸۰۰۰ یعنی مبلغ ۸۰۰ تومان تخفیف داده است. لذا با استفاده از جدول تناسب زیر، درصد تخفیف را مشخص می کنیم:

قیمت اصلی	۸۰۰۰	۱۰۰
مقدار تخفیف	۸۰۰	?

$$\Rightarrow ? = \frac{800 \times 100}{8000} = 10\%$$

سود

منظور از سود در فروش یک کالا این است که مبلغی بیش تر از قیمت خریداری شده توسط خودمان دریافت کنیم. به طور مثال اگر کالایی را به قیمت ۵۰۰۰ تومان خریداری کنیم و بخواهیم آن را با ۱۵ درصد سود بفروشیم، آن گاه باید قیمت این کالا را ۵۷۵۰ تومان اعلام کنیم. به روش های زیر برای محاسبه ی مقدار سود دقت کنید.

روش اول: باید ۱۵ درصد به قیمت کل (یعنی ۱۰۰ درصد) اضافه کنیم بنابراین باید $100 + 15 = 115$ درصد قیمت کالا را دریافت کنیم.

	$\times 50\%$	
قیمت خرید کالا	۱۰۰	۵۰۰۰
سود	۱۵	?
قیمت فروش کالا	۱۱۵	?

$$\Rightarrow ? = 15 \times 50 = 750$$

$$\Rightarrow ? = 115 \times 50 = 5750$$
| | $\times 50\%$ | |

البته می توانیم قیمت فروش کالا را با جمع مقدار سود و مبلغ خریداری شده هم مشخص کنیم:

$$۵۰۰۰ + ۷۵۰ = ۵۷۵۰$$

روش دوم: ۱۵٪ سود روی ۱۰۰٪ قیمت خریداری شده توسط خودمان گرفته ایم پس باید $۱۱۵\% = ۱۵\% +$
۱۰۰٪ یا همان ۱/۱۵ قیمت خریداری شده را دریافت کنیم، بنابراین:

$$۵۷۵۰ = ۵۰۰۰ \times \frac{۱۱۵}{۱۰۰} = \text{قیمت فروش کالا} \quad \text{یا} \quad ۵۷۵۰ = ۵۰۰۰ \times ۱/۱۵ = \text{قیمت فروش کالا}$$

در بعضی از مسئله ها مقدار سود و مبلغ فروش مشخص است و می خواهند مبلغ خرید کالا را مشخص کنیم.
به مثال زیر دقت کنید.

مثال ۳: قیمت کالایی پس از افزودن ۲۰٪ به قیمت آن، مبلغ ۵۷۰۰ تومان اعلام شده است. قیمت خرید این
کالا چه قدر بوده است؟

روش اول: وقتی ۲۰٪ به قیمت کالایی اضافه کرده ایم یعنی $۱۲۰\% = ۱۰۰\% + ۲۰\%$ قیمت خریداری شده را
برای فروش کالا اعلام کرده ایم پس ۵۷۰۰ تومان همان ۱۲۰٪ قیمت کالا است، بنابراین برای تعیین قیمت
خرید کالا از جدول تناسب زیر استفاده می کنیم:

قیمت فروش	۱۲۰	۵۷۰۰	$\Rightarrow ? = \frac{۱ \times ۵۷۰۰}{۱۲۰} = ۹۵۰$ مبلغ سود
سود	۲۰	?	
قیمت خرید	۱۰۰	?	$\Rightarrow ? = \frac{۱۰۰ \times ۵۷۰۰}{۱۲۰} = ۴۷۵۰$ قیمت خرید

البته برای حل این مسئله نیازی به رسم جدول تناسب سه طبقه نیست و بهتر است طبقه ی سود را در این
جدول حذف کنیم اما این روش را با توجه به کتاب درسی بیان کرده ایم.

روش دوم: همان طور که گفتیم، ۵۷۰۰ تومان یعنی ۱۲۰٪ قیمت خریداری شده از طرفی ۱۲۰٪ برابر $\frac{۱۲۰}{۱۰۰}$ یا
 $\frac{۱}{۱/۲}$ است. با تقسیم ۵۷۰۰ بر $\frac{۱۲۰}{۱۰۰}$ و یا $\frac{۱}{۱/۲}$ ، قیمت خرید مشخص می شود.

$$۵۷۰۰ \div \frac{۱۲۰}{۱۰۰} = ۵۷۰۰ \times \frac{۱۰۰}{۱۲۰} = ۴۷۵۰ = \text{قیمت خرید}$$

در بعضی از مسئله ها قیمت خرید و قیمت فروش کالا را اعلام می کنند و می خواهند تا درصد سود را
مشخص کنیم. به مثال زیر دقت کنید.

مثال ۴: علی کالایی را به قیمت ۵۰۰۰ تومان خرید و آن را به قیمت ۶۰۰۰ تومان فروخت، او چند درصد سود کرده است؟

۵۰۰۰ تومان همان ۱۰۰ درصد قیمت خرید است، از طرفی علی ۶۰۰۰ - ۵۰۰۰ یعنی مبلغ ۱۰۰۰ تومان سود کرده است، لذا با استفاده از جدول تناسب زیر، درصد سود او را مشخص می کنیم:

قیمت خرید	۱۰۰	۵۰۰۰
مقدار سود	?	۱۰۰۰

$\Rightarrow ? = 1000 \div 50 = 20$ یا $? = \frac{100 \times 1000}{5000} = 20 = \text{درصد سود}$

مالیات

در کشور عزیزمان، به بیش تر کالاها و خدماتی که ارائه می شود مالیات بر ارزش افزوده تعلق می گیرد. در واقع مالیات پولی است که باید به قیمت کالا اضافه شود و از مشتریان دریافت گردد و فروشنده باید این مبلغ اضافه را به خزانه ی دولت واریز نماید و حق ندارد آن را برای خودش بردارد. به طور مثال اگر قیمت کالایی ۱۵۰۰۰ تومان باشد و به این کالا ۹٪ مالیات بر ارزش افزوده تعلق بگیرد باید مبلغ ۱۶۳۵۰ تومان به فروشنده پرداخت کنیم. مسئله های مالیات را همانند مسئله های سود حل می کنیم. به روش های محاسبه ی مقدار مالیات و مبلغ پرداختی در مثال بالا دقت کنید.

قیمت کالا	۱۰۰	۱۵۰۰۰
مالیات	۹	?

$\Rightarrow ? = 9 \times 1500 = 1350 \Rightarrow 1350 \text{ تومان مقدار مالیات بر ارزش افزوده این کالا است}$

$$\text{مبلغ پرداختی} = 15000 + 1350 = 16350$$

روش دوم: ۹٪ مقدار مالیات بر ارزش افزوده این کالا است پس فروشنده باید ۱۰۹٪ = ۱۰۰٪ + ۹٪ یا همان $\frac{109}{100}$ قیمت

کالا را دریافت کند، بنابراین: $\text{مبلغ پرداختی توسط مشتری} = 15000 \times \frac{109}{100} = 16350$

مثال ۵: فروشنده ای قیمت کالایی را پس از محاسبه ی ۸٪ مالیات بر ارزش افزوده، مبلغ ۷۵۶۰ تومان اعلام کرد. قیمت اصلی این کالا قبل از مالیات چه قدر بوده است؟

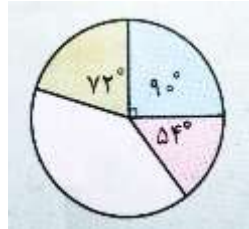
۷۵۶۰ تومان همان ۱۰۸ درصد قیمت اصلی می باشد، بنابراین:

$$\text{قیمت کالا بدون مالیات} = 7560 \div \frac{108}{100} = 7560 \times \frac{100}{108} = 7000$$

درس چهارم - کاربرد درصد در آمار و احتمال

یک دایره کامل زاویه ی ۳۶۰ درجه را نشان می دهد.

مثال: دایره ی شکل مقابل به چند بخش با رنگ های مختلف تقسیم شده و اندازه ی زاویه ی مربوط به هر بخش نوشته شده است. درصد مساحت هر بخش را به کل دایره بنویسید.



پاسخ:

$$\begin{aligned} \frac{90^\circ}{360^\circ} &= \frac{1}{4} = \frac{25}{100} \xrightarrow{\times 25} 90^\circ \rightarrow 25\% \\ \frac{54^\circ}{360^\circ} &= \frac{54^\circ \div 18}{360^\circ \div 18} = \frac{3}{20} = \frac{15}{100} \xrightarrow{\times 20} 54^\circ \rightarrow 15\% \\ \frac{72^\circ}{360^\circ} &= \frac{72^\circ \div 18}{360^\circ \div 18} = \frac{4}{20} = \frac{20}{100} \xrightarrow{\times 25} 72^\circ \rightarrow 20\% \end{aligned}$$

مثال: ۳۰٪ دانش آموزان کلاسی در رشته ی بسکتبال، ۵۰٪ در رشته ی فوتبال و ۲۰٪ در رشته ی والیبال شرکت دارند. نمودار دایره ای مربوط به این داده ها را رسم کنیم.

پاسخ:

$$\frac{30}{100} = \frac{\boxed{36}}{360} \xrightarrow{\times 36} \frac{3}{10} = \frac{\boxed{108}}{360} \xrightarrow{\times 36} \boxed{108} = 108^\circ \text{ بسکتبال}$$

روش محاسبه ی دیگر:

$$\frac{۵}{۱۰۰} \times ۳۶۰^\circ = ۵ \times ۳.۶ = ۱۸^\circ \text{ فوتبال}$$

$$\frac{۲}{۱۰۰} \times ۳۶۰^\circ = ۷.۲^\circ \text{ والیبال}$$

اکنون دایره ای را رسم می کنیم و قسمت های مختلف را با استفاده از نقاله معین می کنیم.



مثال: در نمودار دایره ای، ۶۰٪ یعنی چند درجه؟

پاسخ:

$$\frac{۶۰}{۱۰۰} \times ۳۶۰^\circ = ۲۱۶^\circ$$

مثال: در داخل کیسه ای ۱۰ کارت وجود دارد که روی هر یک از آن ها، اعداد از ۱ تا ۱۰ نوشته شده است. اگر بدون نگاه کردن به داخل کیسه یک کارت را بیرون بیاوریم:

الف: احتمال این که عدد روی کارت بزرگ تر از ۶ باشد، چه قدر است؟

ب: احتمال این که عدد روی کارت کم تر از ۳ باشد، چه قدر است؟

ج: نمودار دایره ای مربوط به موارد بالا را رسم کنید.

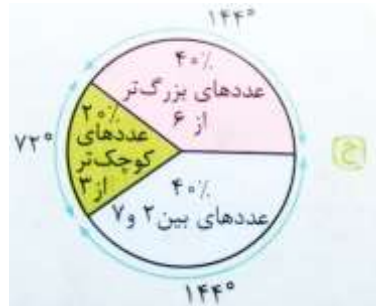
د: باقی مانده ی نمودار دایره ای مربوط به کدام اعداد روی کارت ها است؟

پاسخ: الف) اعداد بزرگ تر از ۶ یعنی ۷، ۸، ۹ یا ۱۰.

ب) یعنی عدد ۱ یا ۲ روی کارت باشد، پس:

$$\frac{2}{10} = \frac{20}{100} = 20\%$$

$$\frac{2}{10} = \frac{72}{360} = 20\%$$



د) باقی مانده ی نمودار مربوط به عددهای بین ۲ و ۷ یعنی (۳، ۴، ۵ یا ۶) می باشد.

کاربرد درصد در آمار و احتمال

نمودار دایره ای

فرض کنید که در یک نظرسنجی از دوستان خود میزان علاقه مندی آن ها به انواع برندهای معروف اتومبیل را پرسیده اید و اطلاعات به دست آمده را در جدول زیر وارد کرده اید.

پورشه	آئودی	تویوتا	BMW	بنز	اسم برند
۴	۳	۲	۵	۶	تعداد علاقه مند

همان طور که ملاحظه می کنید، در مجموع از ۲۰ نفر نظرسنجی شده است. حال اگر نسبت هر یک از عددها به ۲۰ را حساب کنیم و سپس در عدد ۱۰۰ ضرب کنیم، درصد علاقه مندی به هر برند مشخص می شود.

$$\frac{6}{20} \times 100 = 30\% \text{ و } \frac{5}{20} \times 100 = 25\% \text{ و } \frac{2}{20} \times 100 = 10\% \text{ و } \frac{3}{20} \times 100 = 15\% \text{ و } \frac{4}{20} \times 100 = 20\%$$

حالا مانند شکل مقابل یک دایره را به ۱۰۰ قسمت مساوی تقسیم می کنیم،



هر قسمت نشان دهنده ی یک درصد است، سپس درصد مربوط به هر کدام از اتومبیل ها را روی شکل مشخص می کنیم. همان طور که ملاحظه می کنید تقسیم یک دایره به ۱۰۰ قسمت مساوی کمی سخت و دشوار است و شاید قسمت ها به طور دقیق تقسیم نشوند، لذا بهتر است روش دیگری را برای رسم چنین نموداری یاد بگیریم، در این روش کافی است که زاویه ی مربوط به هر یک از درصدهای بالا را با استفاده از جدول تناسب زیر مشخص کنیم. دقت داشته باشید که یک دایره ی کامل یک زاویه ی ۳۶۰ درجه را نشان می دهد، از طرفی دایره ی بالا را به ۱۰۰ قسمت مساوی تقسیم کردیم. پس:

حالا با استفاده از این جدول تناسب، زاویه ها را مشخص می کنیم:

درصد	درجه
۱۰۰	۳۶۰°
درصد مورد نظر	درجه آن

۱۰۰	۳۶۰°
۳۰	?

$\Rightarrow ? = 30 \times 360 / 100 = 108^\circ$

$\times 3/6$

۱۰۰	۳۶°
۲۵	(?)

 $\Rightarrow ? = ۲۵ \times ۳ / ۶ = ۹°$

۱۰۰	۳۶°
۲۰	(?)

 $\Rightarrow ? = ۲۰ \times ۳ / ۶ = ۷۲°$

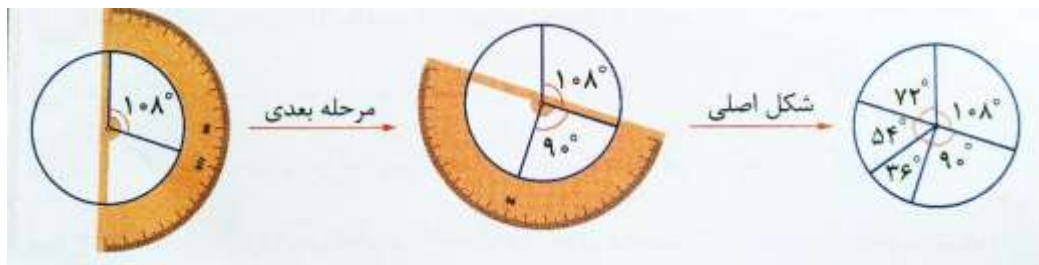
۱۰۰	۳۶°
۱۰	(?)

 $\Rightarrow ? = ۱۰ \times ۳ / ۶ = ۳۶°$

۱۰۰	۳۶°
۱۵	(?)

 $\Rightarrow ? = ۱۵ \times ۳ / ۶ = ۵۴°$

اکنون یک دایره رسم کرده و مرکز آن را مشخص می کنیم، سپس با کمک یک نقاله و قرار دادن مرکز نقاله روی مرکز دایره، زاویه ی مربوط به هر قسمت را مشخص می کنیم تا شکل موردنظر به دست آید.



پرتاب سکه

وقتی یک سکه را می اندازیم یا روی سکه بالا قرار می گیرد و یا پشت آن. اما انتظار داریم تقریباً در نصف (یعنی ۵۰ درصد) پرتاب ها، رو و در نصف (۵۰ درصد) دیگر پرتاب ها هم پشت سکه بیاید که در اصطلاح می گوئیم احتمال رو آمدن و پشت آمدن سکه ۵۰ - ۵۰ است.



مثال ۱: یک سکه را ۵۰۰ مرتبه انداخته ایم. نتیجه این آزمایش در جدول زیر دیده می شود. در چند آزمایش سکه رو آمده است؟ برای پیدا کردن جواب کافی است که درصد رو آمدن (یعنی ۴۷/۴) را در عدد ۵۰۰ ضرب کنیم؛

پشت	رو
۵۲/۶	۴۷/۴

$$\text{تعداد رو آمدن سکه در ۵۰۰ پرتاب} = ۵۰۰ \times \frac{۴۷/۴}{۱۰۰} = ۲۳۷$$

پرتاب تاس

وقتی که یک تاس را می اندازیم، حتماً یکی از عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ در روی تاس ظاهر می شوند. پس در پرتاب ۳۰ مرتبه یک تاس انتظار داریم هر کدام از وجه ها (عددهای ۱ تا ۶) را تقریباً ۵ مرتبه مشاهده کنیم. در این آزمایش احتمال وقوع و یا ظاهر شدن هر یک از عددها از نصف (یعنی ۵۰ درصد) کم تر است. به طور مثال احتمال ظاهر شدن عدد ۵، از نصف کم تر است. اما احتمال ظاهر شدن عدد فرد، ۵۰ - ۵۰ می باشد. به جدول زیر دقت کنید.



احتمال از نصف کم تر	۵۰-۵۰	احتمال از نصف بیش تر	در پرتاب یک تاس
✓			مضرب ۳ بیاید
	✓		عدد زوج بیاید
		✓	عدد بزرگ تر از ۲ بیاید
	✓		عدد کوچک تر از ۴ بیاید

مریم عزیزی

فصل هفتم - تقریب

تقریب

در محاسبه های تقریبی برای نشان دادن مقدار تقریبی عددها، به جای علامت مساوی (=) از علامت « $\approx$ » استفاده می کنیم که یعنی: «تقریباً برابر است با».

برای تقریب زدن عددها، دو روش داریم:

۱- روش قطع کردن

۲- روش گرد کردن

• روش قطع کردن

در این روش، رقم های سمت راست تقریب، یعنی عددهایی را که ارزش مکانی آن ها از تقریب داده شده، کم تر باشد با صفر جایگزین می کنیم.

تقریب کم تر از

$$\begin{array}{r} 293 \\ \hline 290 \end{array} \quad \begin{array}{c} 10 \\ \approx \\ \text{قطع کردن} \end{array}$$

مثال: با تقریب کم تر از ۱۰ در روش قطع کردن، یعنی تمامی رقم هایی که ارزش مکانی آن ها کم تر از دهگان است، به صفر تبدیل شوند.

تقریب کم تر از

$$\begin{array}{r} 43591 \\ \hline 43000 \end{array} \quad \begin{array}{c} 1000 \\ \approx \\ \text{قطع کردن} \end{array}$$

با تقریب کم تر از ۱۰۰۰ در روش قطع کردن، یعنی تمامی رقم هایی که ارزش مکانی آن ها کم تر از یکان هزار است (رقم های سمت راست ۳) به صفر تبدیل شوند.

نکته: با تقریب دهگان، یعنی با تقریب کم تر از ۱۰، با تقریب صدگان، یعنی با تقریب کم تر از ۱۰۰.

مثال: عدد ۳۹/۷۴۱ را با تقریب کم تر از ۱ قطع کنید.

پاسخ: این عدد را در جدول ارزش مکانی قرار می دهیم. وقتی می گوییم با تقریب کم تر از یک، یعنی رقم هایی که ارزش مکانی آن ها کم تر از یکان است، باید به صفر تبدیل شوند.

خط ممیز					
هزارم	صدم	دهم	یکی	دهتایی	صدتایی
۱	۴	۷	۹	۳	

$$39.741 \xrightarrow{1} 39.000 = 39$$
 قطع کردن

وقتی می‌گوییم با تقریب کم تر از ۰/۰۱، یعنی رقم‌هایی که در مرتبه ی هزارم و ده هزارم و ... قرار دارند، به صفر تبدیل شوند.

$$\pi \approx 3/14159265$$

مقدار عدد π تا هشت رقم اعشار برابر است با:

$$\pi \approx 3/14$$

مقدار عدد π با تقریب کم تر از ۰/۰۱ (تا دو رقم اعشار):

$$\pi \approx 3/1415$$

مقدار عدد π با تقریب کم تر از ۰/۰۰۱ (تا چهار رقم اعشار):

$$\pi \approx 3/1$$

مقدار عدد π با تقریب کم تر از ۰/۱ (تا یک رقم اعشار):

می‌دانیم که با تقسیم صورت هر کسر بر مخرج آن، می‌توان آن کسر را به صورت عدد اعشار نوشت.

وقتی می‌گوییم تقسیم را تا یک رقم اعشار انجام دهید، یعنی خارج قسمت را با تقریب کم تر از ۰/۱ به دست آورید و یا وقتی می‌گوییم تقسیم را تا دو رقم اعشار انجام دهید، یعنی خارج قسمت را با تقریب کم تر از ۰/۰۱ حساب کنید.

در تقریب رقم دهگان، اختلاف هر عدد، با مقدار تقریبی آن کوچک تر از ۱۰ است.

مثال: عدد ۱۷۹ با تقریب دهگان به روش قطع کردن می‌شود: ۱۷۰.

۹ از ۱۰ (مقدار رقم تقریب) کوچک تر است. $179 - 170 = 9$

به طور کلی در تقریب به روش قطع کردن، همیشه اختلاف هر عدد با مقدار تقریبی آن، کوچک تر از مقدار رقم تقریب است.

$$\begin{array}{r} 24/000 \\ \hline 3/428 \end{array} \rightarrow \frac{24}{7} = 3/428$$

مثال: مقدار تقریبی کسر $\frac{24}{7}$ را تا سه رقم اعشار حساب کنید.

پاسخ:

نکته: برای محاسبه ی مقدار تقریبی کسرها به روش قطع کردن، فقط کافی است که خارج قسمت تقسیم را به اندازه ی رقم‌های اعشاری عدد تقریب محاسبه کنیم. برای مثال اگر بخواهیم مقدار تقریبی کسر $\frac{19}{11}$ را با تقریب کم تر از ۰/۰۱ به روش قطع کردن حساب کنیم، باید خارج قسمت تقسیم صورت بر مخرج کسر را تا ۲ رقم اعشار حساب کنیم.

مثال: مقدار تقریبی عدد $\frac{27}{13}$ را با تقریب کم تر از 0.001 به روش قطع کردن حساب کنید.

پاسخ: چون 0.001 دارای سه رقم اعشار است و باید به روش قطع کردن تقریب بزنیم، بنابراین خارج قسمت تقسیم ۲۷ بر ۱۳ را تا سه رقم اعشار حساب می کنیم.

$$\begin{array}{r} 27 \overline{) 13} \\ 2.076 \end{array} \rightarrow \frac{27}{13} \approx 2.076 \quad (\text{با تقریب کم تر از } 0.001 \text{ به روش قطع کردن})$$

• تقریب به روش گرد کردن

برای این که در استفاده از عددهای تقریبی خطای کم تری داشته باشیم، از روش گرد کردن استفاده می کنیم. در این روش با توجه به تقریب مورد نظر، عددی را به صورت تقریبی انتخاب می کنیم که به مقدار واقعی نزدیک باشد. برای مثال مقدار تقریبی عدد ۷۸۳ با تقریب کم تر از ۱۰۰ و روش گرد کردن، برابر ۸۰۰ می شود، چون عدد ۸۰۰ به عدد ۷۸۳ نزدیک تر از عدد ۷۰۰ می باشد.

مثال: با تقریب کم تر از 0.1 به روش گرد کردن، عدد $43/19$ به عدد $43/2$ نزدیک تر است تا عدد $43/1$ ، بنابراین گرد شده ی عدد $43/19$ با تقریب کم تر از 0.1 به روش گرد کردن، برابر است با $43/2$.

در روش گرد کردن، ابتدا به رقم سمت راست تقریب توجه می کنیم. اگر این رقم ۵، یا بزرگ تر از ۵ باشد (یعنی ۵، ۶، ۷، ۸ یا ۹ باشد)، یک واحد به رقم تقریب اضافه می کنیم و سپس رقم های سمت راست تقریب را با صفر جایگزین می کنیم و اگر رقم سمت راست تقریب کوچک تر از ۵ (یعنی ۴، ۳، ۲، ۱، یا صفر باشد) بدون این که به رقم تقریب چیزی اضافه کنیم، رقم های سمت راست تقریب را با صفر جایگزین می کنیم.

مثال: عدد ۴۵۹۳ را با تقریب کم تر از ۱۰۰۰ گرد کنید.

پاسخ:

مثال: مقدار تقریبی عددهای داده شده را با تقریب کم تر از ۱۰ به دو روش بنویسید.

مقدار تقریبی به روش گرد کردن	مقدار تقریبی به روش قطع کردن	عدد
۷۷۰	۷۶۰	۷۶۸
۳۱۳۰	۳۱۲۰	۳۱۲۵
$۲۰/۰۰ = ۲۰$	$۲۰/۰۰ = ۲۰$	$۲۱/۳۹$

نکته: اگر رقم سمت راست تقریب کمتر از ۵ باشد، پاسخ تقریبی به روش قطع کردن و گرد کردن یکسان می شود.
مثال:

$$\begin{array}{l} \text{قطع کردن} \\ ۷۵۲۳/۴ \approx ۷۵۰۰ \\ ۱۰۰ \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{گرد کردن} \\ ۷۵۲۳/۴ \approx ۷۵۰۰ \\ ۱۰۰ \end{array}$$

نکته: برای محاسبه ی مقدار تقریبی کسرها به روش گرد کردن، باید خارج قسمت تقسیم را تا یک رقم بیشتر از تقریب داده شده، محاسبه کنیم؛ یعنی اگر بخواهیم مقدار تقریبی کسری را به روش گرد کردن با تقریب کم تر از $۰/۰۱$ محاسبه کنیم، باید خارج قسمت را تا سه رقم اعشار (یک رقم بیشتر از رقم های اعشاری $۰/۰۱$) محاسبه کنیم و سپس عدد اعشاری به دست آمده را با تقریب داده شده گرد کنیم.

مثال: مقدار تقریبی عدد $\frac{۲۳}{۷}$ را با تقریب کم تر از $۰/۰۰۱$ به روش گرد کردن محاسبه کنید.

پاسخ: باید حاصل تقسیم ۲۳ بر ۷ را تا چهار رقم اعشار (یعنی یک رقم بیشتر از رقم های اعشار $۰/۰۰۱$) حساب کنیم.

$$\begin{array}{l} ۲۳ \overline{) ۷} \\ ۳/۲۸۵۷ \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{۲۳}{۷} \approx ۳/۲۸۵۷ \\ \text{رقم سمت راست تقریب} \end{array} \xrightarrow{\text{رقم سمت راست تقریب بزرگتر از ۴ است.}} \begin{array}{l} \text{گرد کردن +۱} \\ ۳/۲۸۵۷ \approx ۳/۲۹۶۰ \\ ۰/۰۰۱ \end{array}$$

تقریب ۲

تقریب زدن به روش قطع کردن:

وقتی صحبت از سن افراد می شود، مجبوری از عددهای تقریبی استفاده کنیم، به طور مثال اگر سن رضا ۱۲ سال و ۵ ماه و ۱۷ روز باشد، می گوییم سن رضا ۱۲ سال است و یا اگر وزن رضا ۵۳/۳۵۰ کیلوگرم باشد، می گوییم وزن رضا ۵۳ کیلوگرم است. به چنین بیانی از مقدارهای تقریبی، که همواره مقدار کم تر مورد نظر است، روش قطع کردن گفته می شود.

در روش قطع کردن، رقم های سمت راست تقریب را که ارزش مکانی کم تری نسبت به رقم تقریب دارند، با صفر جایگزین می کنیم (یعنی به صفر تبدیل می کنیم) و خود رقم تقریب و همچنین رقم های مرتبه های بالاتر را بدون تغییر می نویسیم.

هزارگان	صدگان	دهگان	یکان	دهم	صدم	هزارم
۵	۶	۷	۳	۲	۸	۴
۵	۶	۰	۰	۰	۰	۰

به این ترتیب ۳ مقدار تقریبی این عدد با تقریب کم تر از ۱۰۰، برابر ۵۶۰۰ خواهد شد.

به طور مثال وقتی می خواهیم مقدار تقریبی عدد ۵۶۷۳/۲۸۴ را با تقریب کم تر از ۱۰۰، به روش قطع کردن حساب کنیم، با توجه به جدول ارزش مکانی این عدد که در قسمت زیر ملاحظه می کنید، تمامی رقم هایی که در مرتبه ی پایین تری از صدگان قرار دارند؛ یعنی رقم هایی که در مرتبه ی دهگان، یکان، دهم، صدم و هزارم قرار دارند را به صفر تبدیل نموده و بقیه رقم ها را بدون تغییر می نویسیم.

در نمایش تقریبی عددها از علامت استفاده می کنیم و این علامت را « تقریباً مساوی » می خوانیم. مثال:

$$۵۶۷۳ / ۲۸۴ \approx ۵۶۰۰ \text{ (با تقریب کم تر از صدگان)}$$

می خوانیم « عدد ۵۶۷۳/۲۸۴ با تقریب کم تر از صدگان تقریباً مساوی با ۵۶۰۰ است. »

نکته: در تقریب به روش قطع کردن، همیشه اختلاف هر عدد با مقدار تقریبی آن کوچک تر از مقدار رقم تقریب است به طور مثال در تقریب رقم صدگان اختلاف هر عدد با مقدار تقریبی آن کوچک تر از صد است و یا در تقریب رقم دهگان، اختلاف هر عدد با مقدار تقریبی آن کوچک تر از ده است. به همین دلیل است که از این به بعد به جای عبارت « با تقریب کم تر از صدگان، دهگان، یکان، دهم و ... » از عبارت « با تقریب کم تر از ۱۰۰، ۱۰، ۱، ۰/۱ و ... » استفاده می کنیم.

مثال ۱: مقدار تقریبی هر یک از عددهای زیر را به روش قطع کردن و با تقریب خواسته شده بنویسید.

الف) $1999/9 = 1900$ (با تقریب کم تر از ۱۰۰)

ب) $1999/9 = 1990$ (با تقریب کم تر از ۱۰۰)

ج) $35/742 = 35$ (با تقریب کم تر از ۱)

د) $35/742 = 35/7$ (با تقریب کم تر از ۱۰)

تقریب زدن عددهای کسری

برای تقریب زدن عددهای کسری مانند $\frac{25}{7}$ به روش قطع کردن، ابتدا صورت کسر را بر مخرج آن تقسیم می کنیم، اگر تقسیم را تا یک رقم اعشار در خارج قسمت انجام دهیم یعنی حاصل را با تقریب کم تر از ۰/۱ به دست آورده ایم و اگر تقسیم را تا دو رقم اعشار در خارج قسمت انجام دهیم؛ یعنی حاصل را با تقریب کم تر از ۰/۰۱ به دست آورده ایم. به همین ترتیب اگر تقسیم را تا سه رقم اعشار انجام دهیم؛ یعنی حاصل را با تقریب کم تر از ۰/۰۰۱ حساب کرده ایم.

$\begin{array}{r} 25/00 \overline{) 7} \\ -21 \\ \hline 4 \\ 3 \\ \hline 0 \\ 0 \\ \hline 0/01 \end{array}$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{25}{7} = 3 \quad (\text{تقریب کم تر از ۱}) \\ \frac{25}{7} = 3/5 \quad (\text{تقریب کم تر از ۰/۱}) \\ \frac{25}{7} = 3/57 \quad (\text{تقریب کم تر از ۰/۰۱}) \end{array} \right.$
--	---

در کسرهایی مانند $\frac{1}{5}$ و $\frac{1}{2}$ که مخرج آن ها فقط ۲ و یا فقط ۵ هستند، همه ی تقریب های آن ها مساوی اند زیرا مقدار دقیق تقسیم صورت این کسرها بر مخرج آن ها تا یک رقم اعشار قابل محاسبه است.

$$\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = 0/2$$

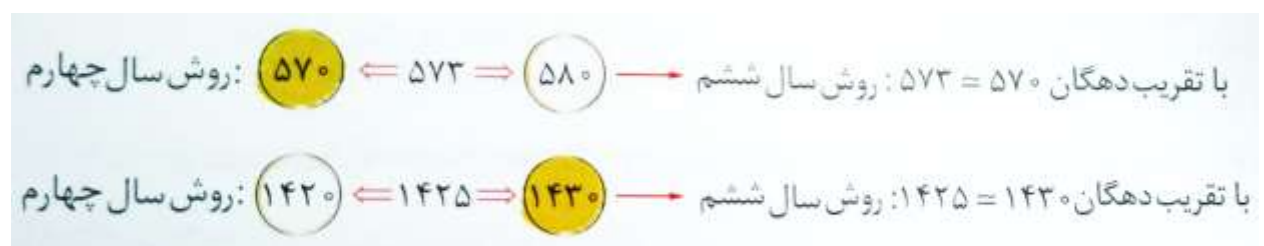
مقدار تقریبی $\frac{1}{5}$ با تمام تقریب های کم تر از ۰/۱ یا ۰/۰۱ یا ۰/۰۰۱ و ... برابر ۰/۵ است.

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0/5$$

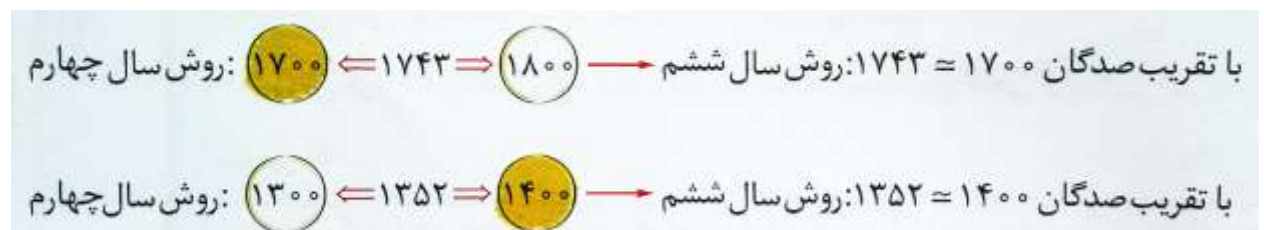
مقدار تقریبی $\frac{1}{2}$ با تمام تقریب های کم تر از ۰/۱ یا ۰/۰۱ یا ۰/۰۰۱ و ... برابر ۰/۲ است.

تقریب زدن به روش گرد کردن

در سال چهارم دبستان با تقریب زدن آشنا شدید و آموختید که برای تقریب زدن هر عددی با توجه به تقریب داده شده یک عدد رند قبل و یک عدد رند بعد از عدد مورد نظر می نویسیم و از بین آن ها عددی را که به عدد مورد نظر نزدیک تر است، به عنوان مقدار تقریبی عدد در نظر می گیریم. اما امسال می آموزیم که هرگاه بخواهیم مقدار تقریبی عددی را « با تقریب دهگان » و یا به عبارت دیگر، « با تقریب کم تر از ۱۰ » به دست آوریم، باید به رقم یکان عدد دقت کنیم. در صورتی که رقم یکان ۵ یا بیش تر از ۵ باشد (یعنی ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹)، به رقم دهگان یک واحد اضافه کرده و یکان را صفر می کنیم. اما در صورتی که رقم یکان کم تر از ۵ باشد (یعنی یکی از رقم های ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴)، در این صورت دهگان تغییر نمی کند و یکان هم صفر می شود. به مثال های زیر دقت کنید:



هرگاه بخواهیم مقدار تقریبی عددی را با « تقریب صدگان » و یا به عبارت دیگر « با تقریب کم تر از صد » به دست آوریم، باید به رقم دهگان عدد دقت کنیم. در صورتی که رقم دهگان ۵ یا بیش تر از ۵ (یعنی ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹) باشد، به رقم صدگان یک واحد اضافه کرده و یکان و دهگان و قسمت اعشاری را صفر می کنیم. اما اگر رقم دهگان کم تر از ۵ باشد، رقم صدگان تغییر نکرده و یکان و دهگان و قسمت اعشاری به صفر تبدیل می شوند. به مثال های زیر دقت کنید:



روش کلی تقریب زدن به روش گرد کردن

در تمامی مثال هایی که در قسمت قبل ملاحظه نمودید مقدار تقریبی عددها به روش گرد کردن به دست آمده اند. برای تقریب زدن عددها به روش گرد کردن، به ترتیب زیر عمل می کنیم:

۱- رقمی را که باید گرد شود، مشخص می کنیم، به طور مثال در تقریب کم تر از ۱۰۰ باید زیر صدگان خط بکشیم.

۲- به اولین رقم جلو (سمت راست) رقم مورد تقریب دقت می کنیم، اگر این رقم ۵ یا بیش تر از ۵ (یعنی ۵، ۶، ۷، ۸، و یا ۹) بود، یک واحد به رقم مورد تقریب اضافه می کنیم در غیر این صورت رقم مورد تقریب تغییری نمی کند.

۳- همه ی رقم های سمت راست رقم مورد تقریب را با صفر جایگزین می کنیم و یا به عبارت دیگر به صفر تبدیل می کنیم.

به مثال های زیر دقت کنید.

(با تقریب کم تر از ۱۰۰۰) با تقریب صدگان $۳۵۸۴۵ \approx ۳۶۰۰۰$ (الف)

(۵+۱)

رقم جلو هزارگان (یعنی رقم صدگان)، برابر ۸ است پس یک واحد به رقم هزارگان اضافه نموده و تمامی رقم های یکان، دهگان و صدگان را به صفر تبدیل می کنیم.

(یا با تقریب کم تر از ۱۰۰) با تقریب صدگان $۳۵۸۴۵ \approx ۳۵۸۰۰$ (ب)

(۸)

رقم جلو صدگان (یعنی دهگان)، برابر ۴ است، پس رقم صدگان را بدون تغییر می نویسیم و تمامی رقم های یکان و دهگان را به صفر تبدیل می کنیم.

(با تقریب دهگان) $۳۵۸۴۵ \approx ۳۵۸۵۰$ (ج)	(با تقریب یکان) $۲۳۲ / ۵ = ۲۳۲۰$ (د)
(۴+۱)	(۲+۱)
(با تقریب دهم) $۲۳۲ / ۷۹ = ۲۳۲ / ۸۰$ (ه)	(با تقریب صدم) $۵۴ / ۵۷۲ = ۵۴ / ۵۷۰$ (و)
(۷+۱)	(۷)

مثال ۲: مقدار تقریبی عدد $۱۷/۹۹۹$ با تقریب کم تر از $۰/۰۱$ مشخص کنید.

$$۱۷/۹۹۹ \approx ۱۸/۰۰۰ = ۱۸$$

نکته:

- ۱- وقتی عددی را گرد می کنیم، منظورمان گرد شده به نزدیک ترین عدد است. اگر رقم مربوط ۵ باشد، رقم مرتبه ی قبلی (از سمت چپ) را یک واحد افزایش می دهیم.
- ۲- در روش گرد کردن گاهی گرد کردن کاهشی (مانند مورد ب) و گاهی گرد کردن افزایشی (مانند مورد الف) می باشد.
- ۳- در روش گرد کردن نیز اختلاف بین هر عدد و مقدار تقریبی آن (یعنی عدد بزرگ تر منهای عدد کوچک تر) همیشه از مقدار تقریب کم تر است.

محاسبه ی مقدار تقریبی کسرها به روش گرد کردن

برای تقریب زدن اعداد کسری به روش گرد کردن، ابتدا مقدار تقسیم صورت کسر بر مخرج آن را تا یک رقم بیش تر از تقریب داده شده به دست می آوریم، یعنی اگر تقریب کم تر از ۰/۱ باشد. باید تقسیم را تا دو رقم اعشار حساب کنیم و سپس عدد به دست آمده را به روش گرد کردن تقریب می زنیم.

مثال ۳: مقدار تقریبی کسر $\frac{27}{7}$ را با تقریب کم تر از ۰/۱ به روش گرد کردن، حساب کنید. (راهنمایی: ابتدا با توجه به این که روش گرد کردن و تقریب کم تر از ۰/۱ می باشد، باید حاصل تقسیم را تا سه رقم اعشار در خارج قسمت حساب کنیم که برای این عمل می توانیم از ماشین حساب هم کمک بگیریم، سپس عدد به دست آمده (یعنی ۳/۸۵۷) را با تقریب داده شده گرد می کنیم).

$$\begin{array}{r}
 27 / 0.00 \quad | \quad 7 \\
 \hline
 - 21 \\
 \hline
 6 \\
 - 5 \\
 \hline
 1 \\
 - 0 \\
 \hline
 10 \\
 - 7 \\
 \hline
 30 \\
 - 21 \\
 \hline
 90 \\
 - 84 \\
 \hline
 60 \\
 - 56 \\
 \hline
 40 \\
 - 35 \\
 \hline
 50 \\
 - 49 \\
 \hline
 10
 \end{array}$$

$$\frac{27}{7} = 3.857 = 3.86 \quad (\text{با تقریب کم تر از } 0.1)$$

تفاوت بین روش قطع کردن و گرد کردن

در روش قطع کردن، سرعت انجام محاسبات بیشتر است اما در روش گرد کردن، جواب به دست آمده دقیق تر است. لذا استفاده از این روش ها به اهمیت دقت پاسخ و سرعت انجام محاسبات بستگی دارد. در ضمن به یاد داشته باشید که اگر رقم جلوی تقریب کوچکتر از ۵ (یعنی ۰، ۱، ۲، ۳ و یا ۴) باشد، مقدار تقریبی عدد با تقریب داده شده از هر دو روش یکسان است.

$$\begin{cases} \text{(قطع شده با تقریب کم تر از ۱۰۰)} & ۵۳۴۷ \approx ۵۳۰۰ \\ \text{(گرد شده با تقریب کم تر از ۱۰۰)} & ۵۳۴۷ \approx ۵۳۰۰ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{(قطع شده با تقریب کم تر از ۱۰۰)} & ۲۷۶۴ \approx ۲۷۰۰ \\ \text{(گرد شده با تقریب کم تر از ۱۰۰)} & ۳۷۶۴ \approx ۲۸۰۰ \end{cases}$$

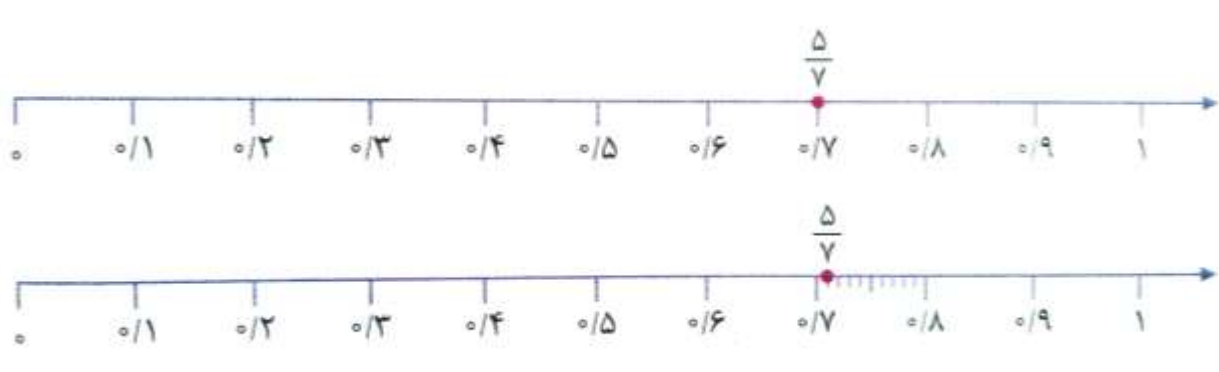
نکته: اگر رقم سمت راست تقریب، کم تر از ۵ باشد، جواب به دست آمده در هر دو روش قطع کردن و گرد کردن یکی می شود.

نمایش تقریبی عددها روی محور

اگر بخواهیم عددی مانند $\frac{5}{7}$ را روی محور نمایش دهیم، به دلیل این که تقسیم یک واحد به ۷ قسمت مساوی کمی سخت است بهتر است که از نمایش تقریبی این عدد روی محور استفاده کنیم. اگر حاصل تقسیم صورت کسر بر مخرج آن را تا یک رقم اعشار در خارج قسمت حساب کنیم، مقدار تقریبی این عدد با تقریب ۰/۱ به دست می آید. حال اگر بخواهیم که موقعیت دقیق تری از این عدد روی محور نمایش دهیم، کافی است که تقسیم را تا دو رقم اعشار ادامه دهیم تا مقدار تقریبی عدد با تقریب ۰/۰۱ به دست آید.

به این ترتیب موقعیت جدید از موقعیت قبلی دقیق تر می باشد و به همین ترتیب با پیشروی در تقسیم باز هم موقعیت های دقیق تری نسبت به قبل به دست می آید.

$$\begin{array}{r} 5/00 \overline{) 7} \\ -4/9 \\ \hline 0/10 \\ 0/07 \\ \hline 0/03 \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{5}{7} \approx 0/7 \text{ (با تقریب کم تر از } 0/1) \\ \frac{5}{7} \approx 0/71 \text{ (با تقریب کم تر از } 0/01) \end{array} \right.$$



عدد پی

به مقدار تقریبی عددهای $\frac{22}{7}$ و عدد π (بخوانید عدد پی) تا ۵ رقم اعشار دقت کنید. مقدار تقریبی این دو عدد با تقریب کم تر از ۰/۱ و ۰/۰۱ دقیقا با هم برابر می باشد. لذا می توانیم گاهی اوقات به جای عدد π از کسر $\frac{22}{7}$ هم استفاده کنیم.

$$\frac{22}{7} = 3/14285$$

$$\pi = 3/14159$$

مثال ۴: شعاع دایره ای ۷ سانتی متر است. محیط و مساحت این دایره را حساب کنید. ($\pi = 3/14$)

$$\text{روش اول} \left\{ \begin{array}{l} \text{محیط دایره} = \pi \times \text{قطر} = 2 \times 7 \times 3/14 = 43/99 \\ \text{مساحت دایره} = \pi \times \text{شعاع} \times \text{شعاع} = 7 \times 7 \times 3/14 = 153/89 \end{array} \right.$$

$$\text{روش دوم} \left\{ \begin{array}{l} \text{محیط دایره} = 2 \times \cancel{7} \times \frac{22}{\cancel{7}} = 44 \\ \text{مساحت دایره} = 7 \times \cancel{7} \times \frac{22}{\cancel{7}} = 154 \end{array} \right.$$

همان طور که ملاحظه می کنید، زمانی که به جای مقدار تقریبی عدد π از کسر $\frac{22}{7}$ استفاده کردیم، مقادیر محیط و مساحت دایره با اختلاف بسیار ناچیزی نسبت به زمانی که مقدار تقریبی π را تقریباً مساوی ۳/۱۴ در نظر گرفتیم به دست آمد.

درس دوم: اندازه گیری و محاسبات تقریبی

دقت اندازه گیری

به خط کش مقابل دقت کنید.



کوچک ترین قسمتی که روی این خط کش مشخص شده، 0.5 سانتی متر یا 5 میلی متر است، بنابراین دقت اندازه گیری این خط کش 0.5 سانتی متر است؛ یعنی این خط کش اندازه های کم تر از 0.5 سانتی متر یا 5 میلی متر را برای ما مشخص نمی کند. اندازه ی مدادی که روی شکل دیده می شود، بین $3/5$ و 4 سانتی متر است، چون خط کش نمی تواند بین این دو عدد را برای ما مشخص کند و اندازه ی مداد به $3/5$ سانتی متر نزدیک تر است، ما اندازه ی مداد را به طور تقریبی $3/5$ سانتی متر در نظر می گیریم. اختلاف اندازه ی واقعی مداد و عدد $3/5$ ، از 0.5 سانتی متر کم تر است، بنابراین می گوییم این خط کش اندازه اشیا را با تقریب کم تر از 0.5 سانتی متر مشخص می کند. در خط کش های معمولی، کوچک ترین قسمتی که روی آن ها مشخص شده، 1 میلی متر است؛ یعنی دقت اندازه گیری این خط کش ها 1 میلی متر است؛ یعنی این خط کش ها اندازه ی اشیا را با تقریب کم تر از 1 میلی متر مشخص می کنند.



برای هر نوع اندازه گیری، با توجه به موضوع و اهمیت آن، از ابزار مناسب استفاده می کنیم تا تقریب موردنظر حاصل شود.

مثال: برای اندازه گیری وزن یک انسان، به ترازویی با دقت تا 1 کیلوگرم نیاز داریم.

برای اندازه گیری دمای بدن انسان، به دماسنجی با دقت تا 1 درجه نیاز داریم.

برای اندازه گیری وزن فلزات و سنگ های گرانبها، به ترازویی با دقت تا 0.1 گرم نیاز داریم.

در محاسبه های تقریبی، با توجه به شرایط، ابتدا عددها را تقریب می زنیم و سپس محاسبه را انجام می دهیم و یا در بعضی موارد، ابتدا محاسبه را انجام می دهیم و سپس حاصل را تقریب می زنیم.

مثال: قیمت فروش نوعی تخته، متر مربعی ۸۰۰۰ تومان است. قیمت تخته ای به ابعاد $۳/۴۴$ و $۲/۸۳$ متر چند تومان است؟

$$\text{متر مربع } ۲/۸ \times ۳/۴ = ۹/۵۲$$

پاسخ: روش ۱: ابتدا ابعاد تخته را با تقریب کم تر از $۰/۱$ گرد می کنیم و مساحت را حساب می کنیم.

$$\text{متر مربع } ۲/۸۳ \times ۳/۴۴ = ۹/۷۳۵۲$$

روش ۲: ابتدا مساحت تخته را حساب می کنیم و سپس عدد حاصل را با تقریب کم تر از $۰/۱$ گرد می کنیم.

$$\begin{array}{l} \text{گرد} \\ ۹/۷۳۵۲ \approx ۹/۷۴ \\ \text{۰/۰۱} \end{array}$$

اندازه ی واقعی مساحت:

همان طور که ملاحظه می کنید، در روش دوم مساحت به دست آمده به مساحت واقعی تخته نزدیک تر است؛ بنابراین در این مسئله بهتر است که ابتدا مساحت را به دست آورده و سپس عدد حاصل را تقریب بزنیم.

$$\text{قیمت تخته، تومان } ۹/۷۴ \times ۸۰۰۰ = ۷۷۹۲۰$$

هر یک از عددهای مخلوط زیر را با تقریب کم تر از ۱ گرد کنید.

$$۱۷\frac{۱}{۵}$$

$$۳\frac{۴}{۵}$$

$$۲۹\frac{۷}{۸}$$

پاسخ:

الف) چون $\frac{۱}{۵}$ از نصف تقریب (نصف عدد ۱ یعنی $\frac{۱}{۲}$) کم تر است، بنابراین:

$$۱۷\frac{۱}{۵} \approx ۱۷ + ۰ = ۱۷$$

ب) چون عدد $\frac{۴}{۵}$ از نصف بیشتر است، بنابراین:

$$۳\frac{۴}{۵} \approx ۳ + ۱ = ۴$$

چون $\frac{۷}{۸}$ از نصف بیشتر است، بنابراین:

$$۲۹\frac{۷}{۸} \approx ۲۹ + ۱ = ۳۰$$

ترتیب انجام عملیات

در محاسبات ریاضی، ترتیب انجام عملیات (تقدم محاسبات) به شکل زیر است:

۱- ابتدا حاصل پرانتزها را حساب می کنیم و اگر چندین پرانتز داخل هم باشند، از داخلی ترین پرانتز محاسبه را شروع می کنیم.

۲- بعد از محاسبه ی پرانتزها، عمل های ضرب و تقسیم را انجام می دهیم. (از چپ به راست)

۳- بعد از محاسبه های ضرب و تقسیم، از چپ به راست محاسبه های جمع و تفریق را انجام می دهیم.

مثال: حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$\text{الف)} \quad 2 + 3 \times 5 =$$

$$\text{ب)} \quad 18 - 12 \div 2 =$$

$$\text{ج)} \quad 2 + 4 \times (8 - 3) =$$

$$\text{د)} \quad 8 - 12 \div (1/2 + (3/6 \div 2)) =$$

$$\text{الف)} \quad 2 + 3 \times 5 = 2 + 15 = 17$$

$$\text{ب)} \quad 18 - 12 \div 2 = 18 - 6 = 12$$

$$\text{ج)} \quad 2 + 4 \times (8 - 3) = 2 + 4 \times 5 = 2 + 20 = 22$$

$$\text{د)} \quad 8 - 12 \div (1/2 + (3/6 \div 2)) = 8 - 12 \div (1/2 + 1/4) = 8 - 12 \div 3/2 = 8 - 12 \div 1.5 = 8 - 8 = 0$$

اندازه گیری و محاسبات تقریبی ۲

دقت اندازه گیری

هر وسیله ی اندازه گیری تا حدی می تواند عدد یا مقدار دقیق چیزی را که اندازه می گیریم، نشان دهد. برای مثال، اکثر خط کش هایی که در اختیار دانش آموزان قرار دارد تا واحد میلی متر را نشان می دهد. این خط کش ها طول های کم تر از یک میلی متر را مشخص نمی کنند. بنابراین می گوییم خط کش طول اجسام و یا خط ها را با تقریب کم تر از ۱ میلی متر نشان می دهد. از طرفی چون هر میلی متر، مساوی ۰/۱ سانتی متر است، می توانیم بگوییم که دقت خط کش، با تقریب کم تر از ۰/۱ سانتی متر است.



نکته: برای هر نوع اندازه گیری با توجه به موضوع و اهمیت آن، از وسیله ی اندازه گیری مناسبی استفاده می کنیم تا تقریب مورد نظر ما حاصل شود.

به طور مثال، برای اندازه گیری وزن اشخاص از واحد کیلوگرم استفاده می کنیم. به عبارت دیگر، ترازوها معمولاً وزن اشخاص را با تقریب کم تر از ۱ کیلوگرم نشان می دهد (البته ترازوهای دیجیتال دقت بالاتری دارند) یا برای اندازه گیری وزن یک قطعه طلا از ترازویی استفاده می کنند که دقت آن ۰/۰۱ گرم می باشد. به عبارت دیگر، این گونه ترازوها وزن اجسام را با تقریب کم تر از ۰/۰۱ گرم نشان می دهند.

کاربرد مقدار تقریبی

گاهی اوقات بهتر است اعداد را به صورت تقریبی بیان کنیم تا انجام محاسبه روی آن ها ساده تر شود. در این صورت مقدار محاسبه شده با مقدار واقعی برابر نیست، ولی به آن نزدیک است. به مثال زیر دقت کنید:

$$۵۲۷ \times ۶۷۹ = ۳۵۷۸۳۳$$

همان طور که ملاحظه می کنید حاصل ضرب دو عدد ۵۲۷ و ۶۷۹ دقیقاً مساوی ۳۵۷۸۳۳ شد. حال اگر مقدار دقیق حاصل ضرب مورد نیاز نباشد و فقط بخواهیم مقدار تقریبی آن را به دست آوریم، کافی است که مقدارهای تقریبی این دو عدد را در یک دیگر ضرب کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} 527 = 500 \text{ صدگان} \\ 679 = 700 \text{ صدگان} \end{array} \right\} \Rightarrow 527 \times 679 = 500 \times 700 = 350000$$

بنابراین زمانی که هر یک از عددها را با تقریب صدگان گرد کنیم، مقدار تقریبی حاصل ضرب برابر ۳۵۰۰۰۰ خواهد شد که این مقدار نزدیک به جواب واقعی همان ۳۵۷۸۳۳ می باشد. حال اگر عددها را تقریب دهگان گرد می کردیم، جواب تقریبی به دست آمده نسبت به تقریب صدگان دقیق تر خواهد شد.

$$\left. \begin{array}{l} 527 = 530 \text{ دهگان} \\ 679 = 680 \text{ دهگان} \end{array} \right\} \Rightarrow 527 \times 679 = 530 \times 680 = 360400$$

همان طور که ملاحظه می کنید مقدار تقریبی حاصل ضرب دو عدد در این حالت، اختلاف کم تری نسبت به حالت قبل دارد.

محاسبه ی تقریبی

برای انجام محاسبات تقریبی می توانیم از روش های زیر استفاده کنیم:

روش اول: ابتدا عددها را گرد کنیم، سپس محاسبه را انجام دهیم.

روش دوم: ابتدا حاصل را به دست آورده، سپس پاسخ را گرد کنیم.

مثال ۱:

الف: حاصل عبارت $55 - 29 + 44$ را به دست آورید. سپس جواب به دست آمده را با تقریب کم تر از ۱۰ گرد کنید.

$$\overset{73}{44+29-55=73-55=18=20} \quad (\text{با تقریب کم تر از } 10)$$

ب: ابتدا مقدار تقریبی هر یک از عددهای بالا را با تقریب کم تر از ۱۰ به دست آورده، سپس حاصل عبارت را به دست آورید.

$$\begin{array}{l} 55=60, \quad 29=30, \quad 44=40: \text{مقدار تقریبی عددها با تقریب کم تر از } 10 \\ 44+29-55=40+30-60=70-60=10 \end{array}$$

همان طور که ملاحظه می کنید، مقدار دقیق این عبارت برابر ۱۸ شد و وقتی که مقدار تقریبی جواب را با تقریب کم تر از ۱۰ گرد می کنیم، حاصل ۲۰ می شود. پس اختلاف مقدار تقریبی با مقدار دقیق ۲ واحد است. اما اگر ابتدا عددها را گرد کنیم و سپس حاصل را به دست آوریم، جواب برابر ۱۰ می شود که اختلاف این عدد با مقدار دقیق برابر $۱۸ - ۱۰ = ۸$ واحد می باشد. پس استفاده از روش اول بهتر است.

نکته: وقتی هم باید عملیات انجام گیرد و هم تقریب بزنیم، برای آن که پاسخ به مقدار واقعی نزدیک تر باشد، باید ابتدا عملیات را انجام دهیم و بعد از آن تقریب بزنیم.

اگر ابتدا حاصل عبارت $۵۵ - ۲۹ + ۴۴$ را به دست آوریم و سپس جواب به دست آمده را با تقریب کم تر از ۱۰ قطع کنیم، خواهیم داشت:

$$(قطع شده با تقریب کم تر از ۱۰) \quad ۴۴ + ۲۹ - ۵۵ = ۷۳ - ۵۵ = ۱۸ \approx ۱۰$$

حال اگر مقدار تقریبی هر یک از عددها را با روش قطع کردن و با تقریب کم تر از ۱۰ تقریب بزنیم و سپس محاسبه ی عبارت را انجام دهیم، خواهیم داشت:

$$۵۵ \approx ۵۰, \quad ۲۹ \approx ۳۰, \quad ۴۴ \approx ۴۰: \text{مقدار تقریبی عددها با تقریب کم تر از ۱۰}$$

$$۴۴ + ۲۹ - ۵۵ \approx ۴۰ + ۳۰ - ۵۰ = ۲۰$$

به این ترتیب حاصل عبارت از هر دو روش یکسان خواهد شد. لذا توصیه می کنیم که در محاسبات تقریبی برای این که جواب به دست آمده به مقدار واقعی نزدیک تر باشد از روش گرد کردن استفاده کنید.

مثال ۲: الف) حاصل ضرب $۱۱/۹ \times ۲۵/۲$ را به دست آورید.

$$۲۵/۲ \times ۱۱/۹ = ۲۹۹/۱۸$$

ب) حاصل ضرب $۱۱/۹ \times ۲۵/۲$ را با قطع اعشار و با تقریب کم تر از ۱ به دست آورید.

$$۲۵/۲ \approx ۲۵, \quad ۱۱/۹ \approx ۱۱ \rightarrow ۲۵/۲ \times ۱۱/۹ \approx ۲۵ \times ۱۱ = ۲۷۵$$

ج) حاصل ضرب $۱۱/۹ \times ۲۵/۲$ را ابتدا با قطع اعشار و تقریب کم تر از ۱۰ به دست آورید.

$$۲۵/۲ \approx ۲۰, \quad ۱۱/۹ \approx ۱۰ \rightarrow ۲۵/۲ \times ۱۱/۹ \approx ۲۰ \times ۱۰ = ۲۰۰$$

(د) در کدام حالت، اختلاف با پاسخ واقعی کم ترین مقدار است؟ همان طور که دیده می شود، در حالت (ب)، یعنی حالتی که رقم مورد تقریب کوچک تر است، مقدار تقریبی به مقدار واقعی نزدیک است.

اختلاف جواب ها بسیار زیاد می باشد و جواب در حالت (ب)، به مقدار واقعی نزدیک تر است. لذا باید در محاسبات خود از تقریب مناسب استفاده کنیم، همچنین اگر به جای روش قطع کردن، از روش گرد کردن استفاده می کردیم، جواب ها با اختلاف بسیار کم تری نسبت به روش قطع کردن به دست می آمدند.

$$۲۵/۲ \approx ۱۲ \rightarrow ۲۵/۲ \times ۱۱/۹ = ۲۵ \times ۱۲ = ۳۰۰$$

$$۲۵/۲ \approx ۳۰ \rightarrow ۲۵/۲ \times ۱۱/۹ = ۳۰ \times ۱۰ = ۳۰۰$$

ترتیب انجام عملیات

در انجام عملیات محاسباتی، باید به ترتیب زیر عمل کنیم

(۱) محاسبه ی عبارت داخل پرانتزها

(۲) انجام ضرب یا تقسیم از چپ به راست عبارت، هر کدام که زودتر دیده شد.

(۳) انجام جمع یا تفریق از چپ به راست عبارت، هر کدام که زودتر دیده شد.

بنابراین اگر ترتیب عملیات با پرانتز مشخص نشده باشد، ابتدا باید ضرب ها و تقسیم ها و سپس جمع ها و تفریق ها را از چپ به راست عبارت انجام دهیم.

مثال ۳: حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

ابتدا ضرب را انجام می دهیم

$$\text{الف)} \quad ۵/۲ + ۱/۳ \times ۷/۱ = ۵/۲ + (۱/۳ \times ۷/۱) = ۵/۲ + ۷/۳ = ۱۴/۶$$

حالا ضرب را انجام می دهیم ابتدا تقسیم را انجام می دهیم

$$\text{ب)} \quad ۲۰ - ۲۰ \div ۴ \times ۲ = ۲۰ - (۲۰ \div ۴) \times ۲ = ۲۰ - (۵ \times ۲) = ۲۰ - ۱۰ = ۱۰$$

(راهنمایی: دقت داشته باشید که چون در این عبارت پرانتزی وجود ندارد، پس ابتدا به سراغ محاسبه ی تقسیم و سپس ضرب می رویم (چون تقسیم زودتر از ضرب دیده می شود) و در آخر تفریق را انجام می دهیم.)

$$\text{ج) } 3/7 - 0/3 \times (1/4 + 0/6) = 3/7 - (0/3 \times 2) = 3/7 - 0/6 = 3/1$$

$$\text{د) } (5\frac{1}{4} - 3\frac{3}{10}) \div (7/1 + 0/7) =$$

$$\text{محاسبہ اولیٰ پرائنٹر: } 5\frac{1}{4} - 3\frac{3}{10} = 2\frac{1 \times 5}{4 \times 5} - \frac{3 \times 2}{10 \times 2} = 2\frac{5}{20} - \frac{6}{20} = \frac{45}{20} - \frac{6}{20} = \frac{39}{20}$$

$$\text{محاسبہ دومین پرائنٹر: } 7/1 + 0/7 = 7/8 = \frac{78}{10}$$

$$\text{محاسبہ کل عبارت: } \frac{39}{20} \div \frac{78}{10} = \frac{\cancel{39}^1}{\cancel{20}_2} \times \frac{\cancel{10}^1}{\cancel{78}_2} = \frac{1}{4}$$

مریم عزیزی